

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова.

Кафедра квантовой статистики и теории поля.

## **«Инвариантные меры на группе перестановок»**

Курсовая работа студента 212 группы  
Калайджяна Т.К.

Научный руководитель доцент  
Соболевский А.Н.

Москва  
2006 г.

**1. Введение.** В данной работе изучаются инвариантные вероятностные меры дискретной динамической системы на группе перестановок  $N$  точек, возникающей как дискретная модель несжимаемой жидкости.

Напомним, что движение невязкой несжимаемой жидкости описывается дифференциальным уравнением Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p, \quad (1)$$

где  $v(x, t)$  — векторное поле скоростей жидкости, а  $p(x, t)$  — поле давления (плотность  $\rho$  будем считать единицей). Пользуясь оператором материальной производной по времени  $d/dt = \partial/\partial t + v \cdot \nabla$ , уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\nabla p. \quad (2)$$

Уравнение Эйлера, в частности, служит математической моделью турбулентности в пределе исчезающей вязкости или бесконечно больших чисел Рейнольдса [1]. С этой точки зрения особый интерес представляют асимптотические режимы эволюции случайных начальных полей скорости на больших временах.

Существует несколько подходов к изучению бесконечномерной динамической системы, описываемой уравнением (1) или (2). В частности, движение несжимаемой жидкости можно представлять как инерционное движение в бесконечномерном конфигурационном пространстве, образованном группой Ли SDiff сохраняющих объем диффеоморфизмов — отображений области пространства, занимаемой жидкостью, в себя [2]. Изучение этой динамической системы представляет значительные трудности, связанные со сложной геометрией конфигурационного пространства (этот вопрос изучался, в частности, в работах А. И. Шнирельмана и Я. Бренье). Не существует, например, глобальной по времени теоремы существования гладких решений задачи Коши в трехмерном случае.

В данной работе рассматривается модель динамики несжимаемой жидкости, в которой как время, так и пространство дискретны, а группа Ли SDiff заменяется дискретной группой перестановок. В этом случае само существование глобальных по времени решений и, в частности, стационарных режимов не вызывает сомнения, но остаются вопросы о статистических свойствах траекторий системы при случайных начальных данных, особенно в пределе большого числа частиц жидкости.

Целью данной работы является формулировка дискретной модели, выяснение условий невырожденности, при которых динамика может быть однозначно определена и получение некоторых строгих результатов. Применены как аналитические методы, так и прямое численное моделирование динамики дискретной модели.

Работа строится по следующему плану. В разд. 2 формулируется дискретная модель идеальной жидкости. В разд. 3 приведен необходимый минимум сведений из выпуклого анализа, используемый при доказательстве утверждений разд. 4 и 5. Разд.

4 посвящен обоснованию корректности модели: показано, что разностные соотношения, определяющие ее эволюцию, являются естественной дискретизацией уравнения Эйлера в форме (2). В разд. 5 подробно рассмотрен частный случай одномерной "жидкости" из трех частиц. Интересно, что несмотря на его крайнюю простоту, исчерпывающий анализ данного случая потребовал применения компьютерной программы, текст которой представлен в приложении 2. В разд. 6 собраны строгие результаты, характеризующие динамику одномерной "жидкости", состоящей из произвольного конечного числа частиц. В заключительном разд. 7 подведены итоги и сформулированы гипотезы, доказательству или опровержению которых будет посвящено дальнейшее исследование нашей модели.

**2. Формулировка дискретной задачи:** по  $N$  точкам фиксированного положения  $x_i = \{(x_i^1, x_i^2, x_i^3) \mid 0 \leq x_i^{1,2,3} \leq L, L \in \mathbb{R}\}$  куба с тождественными противоположными гранями размещаются  $N$  материальных точек единичной массы (задача с периодическими краевыми условиями). Для определенности, точки фиксированного положения будем называть "местами", а материальные точки — "частицами". На каждом месте может находиться строго одна частица. Перенумеруем частицы соответственно их положениям в начальный момент времени (т.е.  $i$ -я частица будет на  $i$ -м месте при  $t = 0$ ). Далее в моменты времени  $t = n \in \mathbb{N}$  происходят перестановки частиц

$$\pi_n(i) \circ \pi_{n-1}^{-1}(i) : x_{\pi_{n-1}(i)} \rightarrow x_{\pi_n(i)},$$

где  $(n+1)$ -я перестановка  $\pi = \pi_{n+1} \in S_N$  определяются таким образом, чтобы минимизировать сумму:

$$\sum_{i=1}^N c_{i\pi(i)} = \min, \text{ где } c_{ij} = |x_j - 2x_{\pi_n(i)} + x_{\pi_{n-1}(i)}|^2. \quad (3)$$

Другими словами, минимизируется сумма расстояний между разрешенными местами  $x_j$  и положениями, в которых должны были бы оказаться частицы, двигаясь по инерции:  $y_j = (x_{\pi_n(i)} + (x_{\pi_n(i)} - x_{\pi_{n-1}(i)})) = 2x_{\pi_n(i)} - x_{\pi_{n-1}(i)}$ , таким образом

$$c_{ij} = |y_j - x_j|^2$$

и правило выбора расстановок частиц по местам в каждый момент времени определяется из условия:

$$\sum_{i=1}^N |x_{\pi_n(i)} - y_{\pi_n(i)}|^2 \leq \sum_{i=1}^N |x_{\pi \circ \pi_n(i)} - y_{\pi_n(i)}|^2 \text{ для } \forall \pi \in S_N \quad (4)$$

Таким образом, задав начальную перестановку  $\pi_1(i)$ , т.е. набор начальных скоростей частиц, можно определить движение системы в последующие моменты времени. Применимость данной модели к описанию движения идеальной жидкости будет обсуждена ниже. Аналогичная модель рассмотрена также в [3], где сводится в итоге к задаче о назначениях (assignment problem), решение которой представляет собой классическую проблему комбинаторики. Отличие данной работы от [3] заключается в подробном рассмотрении дискретной задачи, что дает возможность применить ее

при моделировании более широкого класса задач нежели построение модели идеальной жидкости.

Будем теперь рассматривать движение набора частиц, описываемое перестановками  $\pi_n(i)$  как ориентированный граф на симметрической группе  $S_N$ , имеющей, очевидно,  $N!$  элементов. Узлы графа располагаются на соответствующих элементах  $S_N$ . При определенных условиях, налагаемых на взаимное расположение частиц (см. ниже подробное рассмотрение случая 3-х точек) движение системы детерминировано и из каждой вершины графа выходит только одно ребро.

**ТЕОРЕМА 1** *Каждая компонента связности графа отображения  $\pi_t(i)$  конечного множества в себя имеет цикл, и при том только один.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Конечность множества образов  $\{i\}, \{\pi_1(i)\}, \dots, \{\pi_t(i)\}, \dots$  влечет существование повторения  $\{\pi_p(i)\} = \{\pi_q(i)\}$ , а потому существование цикла периода  $p - q$ .

Если бы в одной связной компоненте было бы два цикла, то на соединяющей их цепочке ребер из какой-либо промежуточной вершины выходило бы два ориентированных ребра — одно к одному, а другое — к другому циклу. ■

Таким образом, граф, описывающий движение системы, всегда можно разбить на компоненты связности, состоящие из цикла, либо из цикла с "растущими" из него деревьями. Напомним, что *деревом* называют связный граф без простых циклов.

Зададим теперь на  $S_N$  вероятностную меру  $\mathbb{P}_t$ , где  $t$  — время, взяв в качестве соответствующей сигма-алгебры семейство всех подмножеств  $S_N$  и положив  $\mathbb{P}_1(\pi) = \frac{1}{N!}, \forall \pi \in S_N$ . В силу того, что каждая компонента связности графа имеет цикл и число вершин графа конечно, существует момент времени  $\tau$  такой, что для любого момента времени  $t > \tau$  мера  $\mathbb{P}_t = \mathbb{P}_\tau$ , причем  $\mathbb{P}_\tau$  зависит только от заданной конфигурации системы, т.е. от  $\{x_i\}$ . Будем называть  $\mathbb{P}_\tau$  *инвариантной мерой*. Изучению зависимости ее от  $\{x_i\}$  посвящена данная работа.

**3. Элементы выпуклого анализа.** Для дальнейших рассуждений нам потребуются некоторые сведения из выпуклого анализа [4].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Пусть  $S \subset \mathbb{R}^d$  и  $f : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , тогда *надграфиком* (*эпиграфом*) называется множество

$$\text{epi } f = \{(x, \mu) | x \in S, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq f(x)\}.$$

Функция  $f$  называется *выпуклой*, если  $\text{epi } f$  есть выпуклое множество. Напомним, что множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок, концами которого являются эти точки.

Иногда бывает удобно пользоваться следующим эквивалентным определением: функцию  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  будем называть *выпуклой*, если

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_m f(x_m), m \geq 2$$

при  $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ .

Выпуклая функция  $f$  называется *собственной*, если по крайней мере для одного  $x$  выполнено неравенство  $f(x) < +\infty$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Выпуклая функция  $f$  называется *замкнутой*, если множество  $epi f$  замкнуто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор  $x^* \in \mathbb{R}^d$  называется *субградиентом* выпуклой функции  $f$  в точке  $x$ , если

$$f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z - x \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^d \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Субдифференциалом* выпуклой функции  $f$  на  $\mathbb{R}^d$  называется множество  $\partial f \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  пар  $(x, x^*)$ , удовлетворяющих (5) для всех  $z \in \mathbb{R}^d$ . Если  $\partial f(x)$  не пусто, то говорят, что  $f$  субдифференцируема в точке  $x$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Многозначное отображение  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  называется *циклически монотонным*, если

$$\langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle + \langle x_2 - x_1, x_1^* \rangle + \dots + \langle x_0 - x_m, x_m^* \rangle \leq 0 \quad (6)$$

для всякого конечного набора пар  $(x_i, x_i^*)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  ( $m$  произвольно), такого, что  $x_i^* \in \rho(x_i)$ .

Если  $f$  — собственная выпуклая функция, то отображение  $\partial f$  циклически монотонно. Действительно, если  $x_i^* \in \partial f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, m$ , то

$$\langle x_{i+1} - x_i, x_i^* \rangle \leq f(x_{i+1}) - f(x_i), i = 0, \dots, m, x_{m+1} = x_0$$

для каждого скалярного произведения в выражении, определяющем циклическую монотонность. Поэтому эта сумма мажорируется числом

$$[f(x_1) - f(x_0)] + [f(x_2) - f(x_1)] + \dots + [f(x_0) - f(x_m)] = 0.$$

ТЕОРЕМА 2.[4, §24] Пусть  $\rho$  — многозначное отображение из  $\mathbb{R}^d$  в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда для существования выпуклой собственной функции  $f$ , такой, что  $\rho(x) \subset \partial f(x)$  для всех  $x$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\rho$  было циклически монотонным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, поскольку субдифференциал сам есть циклически монотонное отображение. Наоборот, предположим, что  $\rho$  циклически монотонно. Зафиксируем некоторую пару  $(x_0, x_0^*)$  из графика отображения  $\rho$  (который естественно предполагать непустым) и определим функцию  $f$  формулой

$$f(x) = \sup\{\langle x - x_m, x_m^* \rangle + \dots + \langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle\},$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным наборам пар  $(x_i, x_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , принадлежащих графику отображения  $\rho$ . Коль скоро  $f$  есть верхняя грань некоторого семейства аффинных функций,  $f$  — замкнутая выпуклая функция. Из циклической монотонности  $\rho$  следует, что  $f(x_0) = 0$ , т.е.  $f$  — собственная функция. Пусть теперь векторы  $x$  и  $x^*$  таковы, что  $x^* \in \rho(x)$ . Мы покажем сейчас, что  $x^* \subset \partial f(x)$ . Достаточно проверить, что неравенство

$$f(y) > \alpha + \langle y - x, x^* \rangle$$

выполняется для всяких  $\alpha < f(x), y \in \mathbb{R}^d$ . Действительно, если  $\alpha < f(x)$ , то из определения  $f$  следует существование некоторого набора пар  $(x_i, x_i^*), i = 1, \dots, m$ , таких, что  $x^* \in \rho(x)$  и

$$\alpha < \langle x - x_m, x_m^* \rangle + \dots + \langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle.$$

Полагая  $x_{m+1} = x, x_{m+1}^* = x^*$ , получим

$$f(y) \geq \langle y - x_{m+1}, x_{m+1}^* \rangle + \langle x_{m+1} - x_m, x_m^* \rangle + \dots + \langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle > \langle y - x, x^* \rangle + \alpha$$

в силу определения  $f$ . Отсюда следует, что  $\rho \subset \partial f$ . ■

**4. Применимость к описанию движения идеальной жидкости.** Требуется показать, что указанная дискретная задача может описывать движение идеальной жидкости, т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера (1) в виде разностного отношения

$$\frac{\Delta v_i}{\Delta t} = -\nabla p(x_{\pi_t(i)}), \quad (7)$$

где  $\nabla p$  — градиент давления (или суммы давления и потенциала внешних сил),  $v_i$  — скорость  $i$ -й частицы, плотность жидкости всюду положена равной единице. Другими словами, нужно показать, что поле ускорений потенциально. Для этого рассмотрим негладкий случай, когда  $N$  конечно и докажем, что ускорение  $i$ -й частицы представимо в виде субградиента некоторой полувыпуклой функции.

Преобразуем (4) к виду:

$$\sum_{i=1}^N x_{\pi_n(i)}^2 - 2\langle x_{\pi_n(i)} y_{\pi_n(i)} \rangle + y_{\pi_n(i)}^2 \leq \sum_{i=1}^N x_{\pi \circ \pi_n(i)}^2 - 2x_{\pi \circ \pi_n(i)} y_{\pi_n(i)} + y_{\pi_n(i)}^2 \text{ для } \forall \pi \in S_N,$$

Учитывая, что  $\sum_{i=1}^N x_{\pi_n(i)}^2 = \sum_{i=1}^N x_{\pi \circ \pi_n(i)}^2$  в силу фиксированности мест, имеем:

$$\sum_{i=1}^N 2\langle x_{\pi_n(i)} y_{\pi_n(i)} \rangle \geq \sum_{i=1}^N 2\langle x_{\pi \circ \pi_n(i)} y_{\pi_n(i)} \rangle \text{ для } \forall \pi \in S_N,$$

или окончательно

$$\sum_{i=1}^N \langle x_{\pi \circ \pi_n(i)} - x_{\pi_n(i)} y_{\pi_n(i)} \rangle \leq 0 \text{ для } \forall \pi \in S_N. \quad (8)$$

Отсюда видно, что условие минимума суммы расстояний  $|x_{\pi_n(i)} - y_{\pi_n(i)}|^2$  эквивалентно условию максимума суммы произведений  $x_{\pi_n(i)} y_{\pi_n(i)}$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** Отображение  $\rho : x_{\pi_n(i)} \rightarrow y_{\pi_n(i)}$  циклически монотонно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем  $N - m$  частиц ( $m$  — произвольно). Соотношение (8) запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^m \langle x_{\pi \circ \pi_n(i)} - x_{\pi_n(i)} y_{\pi_n(i)} \rangle \leq 0 \text{ для } \forall \pi \in S_m. \quad (9)$$

Сумма из (6) (определение циклической монотонности) при формальном переобозначении  $x_i := x_{\pi_n(i+1)}$ ,  $x_i^* := y_{\pi_n(i+1)}$ , запишется в виде циклической суммы

$$\sum_{1 \leq i \leq m}^{\circ} \langle x_{\pi_n(i+1)} - x_{\pi_n(i)}, y_{\pi_n(i)} \rangle \quad (10)$$

Заметим, что эта сумма получается из суммы в (9), если перестановку  $\pi$  положить циклическим сдвигом вправо, т.е.  $\pi(i) = i+1$ , при  $i = 1, \dots, m-1$  и  $\pi(m) = 1$ . Таким образом получим, что

$$\sum_{1 \leq i \leq m}^{\circ} \langle x_{\pi_n(i+1)} - x_{\pi_n(i)}, y_{\pi_n(i)} \rangle \leq 0,$$

т.е. отображение  $\rho : x_{\pi_n(i)} \rightarrow y_{\pi_n(i)}$  циклически монотонно. ■

В силу Теоремы 2 существует выпуклая функция  $\Phi(x)$  такая, что

$$y_{\pi_n(i)} \in \partial\Phi(x_{\pi_n(i)}). \quad (11)$$

Этот факт нам пригодится в дальнейшем.

Здесь следует сослаться на работу [5], в которой нахождение оптимального решения задачи о назначениях связывается с циклической монотонностью и из этого выводится существование выпуклого потенциала оптимального отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию  $p(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть *полувыпуклой*, если функция  $\Phi(x) = p(x) + \frac{|x|^2}{2}$  выпуклая. Запишем выражение (5) для  $\Phi(x)$ :

$$p(z) + \frac{|z|^2}{2} \geq p(x) + \frac{|x|^2}{2} + \langle x^*, z - x \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

После выделения полного квадрата будем иметь:

$$p(z) \geq p(x) + \frac{|z - x|^2}{2} + \langle x^* - x, z - x \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d. \quad (12)$$

Величину  $x^* - x$  назовем *субградиентом полувыпуклой функции*  $p(x)$ .

Вернемся теперь к исходной задаче. Скорость  $i$ -й частицы в момент времени  $t = n$ ,  $\Delta t = 1$  равна

$$\dot{x}_{i_n} = \frac{x_{\pi_n(i)} - x_{\pi_{n-1}(i)}}{\Delta t} = x_{\pi_n(i)} - x_{\pi_{n-1}(i)}.$$

Ускорение  $i$ -й частицы в момент времени  $t = n$  равно

$$\ddot{x}_{i_n} = \frac{\dot{x}_{i_n} - \dot{x}_{i_{n-1}}}{\Delta t} = x_{\pi_n(i)} - x_{\pi_{n-1}(i)} - x_{\pi_{n-1}(i)} + x_{\pi_{n-2}(i)} = x_{\pi_n(i)} - y_{\pi_n(i)}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 Существует полувыпуклая функция  $p(x)$  такая, что

$$-\ddot{x}_{i_n} \in \partial p(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (11) существует выпуклая функция

$$\Phi(x) : y_{\pi_n(i)} \in \partial \Phi(x_{\pi_n(i)}).$$

Примем  $p(x) := \Phi - \frac{|x|^2}{2}$ , тогда  $p(x)$  полувыпукла по определению. Причем,  $y_{\pi_n(i)} - x_{\pi_n(i)} = -\ddot{x}_{i_n}$  — ее субградиент в  $x = x_{\pi_n(i)}$ . ■

Таким образом мы получили дискретный аналог уравнения (1). Осталось лишь перейти от субградиента к градиенту.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 Если  $\partial p(x_0)$  состоит из единственного элемента, где  $p(x)$  — полувыпуклая функция, то  $p(x)$  дифференцируема в  $x_0$  (в обычном смысле) и  $\partial p(x_0) = \nabla p(x_0)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Пусть  $q \in \partial p(x)$ , тогда

$$p(x) \geq p(x_0) + \frac{|x - x_0|^2}{2} + \langle \partial p(x_0), x - x_0 \rangle \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} p(x_0) &\geq p(x) + \frac{|x_0 - x|^2}{2} + \langle q, x_0 - x \rangle \\ &= p(x) + \frac{|x_0 - x|^2}{2} + \langle \partial p(x_0), x_0 - x \rangle + \langle q - \partial p(x_0), x_0 - x \rangle \\ &= p(x) + o(|x_0 - x|) + \langle \partial p(x_0), x_0 - x \rangle + o(|x_0 - x|) \\ &= p(x) + \langle \partial p(x_0), x_0 - x \rangle + o(|x - x_0|), \end{aligned}$$

при  $x \rightarrow x_0$ . Принимая во внимание (13), получаем:

$$p(x) = p(x_0) + \langle \partial p(x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|), \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Что и доказывает наше утверждение. ■

Заметим, что для любого  $x_{\pi_n(i)}$  можно выбрать бесконечно малый вектор  $\epsilon(i)$  такой, что в точках  $x = x_{\pi_n(i)} + \epsilon(i)$  полувыпуклая функция  $p(x)$  имеет единственный субградиент. Это значит, что

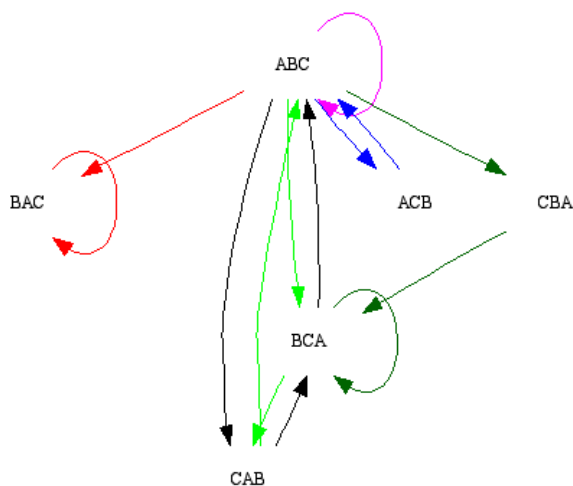
$$\ddot{x}_{i_n} = -\nabla p(x_{\pi_n(i)} + \epsilon(i))$$

Таким образом, получено выражение (7) с малым шевелением аргумента  $p(x)$  и модель, с некоторым допущением, будем считать применимой.

**5. Конкретное рассмотрение случая 3-х точек на  $\mathbb{R}^1$ :** Дальнейшие рассуждения будем вести в рамках конкретного случая, когда имеется 3 места, расположенных на отрезке  $[0, L]$  с тождественными концами. Примем координату 1-й точки за ноль, второй за  $x$ , третьей за  $y$  и для определенности положим  $y > x$ .



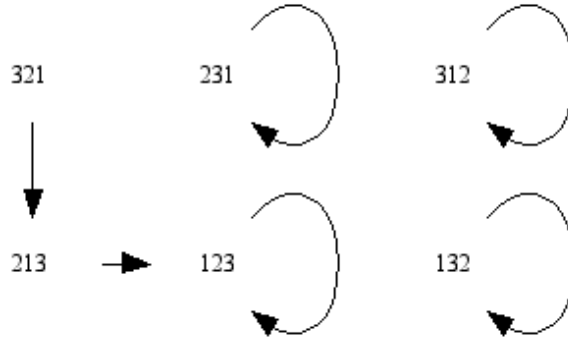
Попробуем рассматривать динамику системы с точки зрения индивидуальных перемещений точек. Зададим, например,  $x = 1/4 L$ ,  $y = 17/24 L$  и, следуя алгоритму (3), будем находить порядок расположения частиц в различные моменты времени (для этих целей написана программа, исходный текст которой представлен в Приложении 2). Если "назвать" частицы буквами А, В и С, то получится набор траекторий, изображенных на рисунке:



Различными цветами обозначены различные случаи начальной перестановки, а расстановка в начальный момент времени есть  $ABC$ . Соответственно, нужны еще пять подобных диаграмм для описания случаев, когда начальная расстановка есть  $BAC, BCA, CAB, CBA, ACB$ . Такое рассмотрение затрудняет анализ. Попробуем сопоставить набору расстановок набор перестановок, с помощью которых данные расстановки реализуются:

$$\begin{aligned}
 ABC &\xrightarrow{(123)} ABC \\
 ABC &\xrightarrow{(213)} BAC \xrightarrow{(123)} BAC \\
 ABC &\xrightarrow{(231)} BCA \xrightarrow{(231)} CAB \xrightarrow{(231)} ABC \\
 ABC &\xrightarrow{(132)} ACB \xrightarrow{(132)} ABC \\
 ABC &\xrightarrow{(312)} CAB \xrightarrow{(312)} BCA \xrightarrow{(312)} ABC \\
 ABC &\xrightarrow{(321)} CBA \xrightarrow{(213)} BCA \xrightarrow{(123)} BCA
 \end{aligned}$$

Если мы теперь рассмотрим движение этой системы не на наборе расстановок, но на группе  $S_3$ , то получим граф:



Надо заметить, что оставшиеся 5 диаграмм расстановок также в него укладываются, т.к. "названия" для частиц мы выбирали произвольно и ничто не мешает нам эти "названия" поменять местами. Таким образом, оказывается удобным рассматривать смену групповых операций на множестве частиц.

Найдем теперь все возможные графы на  $S_3$ , для различного взаимного расположения точек А, В и С. Для этого вначале выделим множество пар  $(x, y)$ , для которых система в некоторый момент времени переходит в "запрещенное состояние", т.е. возникают случаи, когда две или три частицы после очередной перестановки должны попасть в одну точку. Назовем *вырожденными* случаи, при которых могут возникнуть "запрещенные состояния".

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4** *Вырожденные случаи представляются на плоскости  $(xOy)$  семейством прямых.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для мест 0,  $x$ ,  $y$  перебором найдем точки, в которые могут попасть частицы, двигаясь по инерции за один шаг по времени. Их окажется всего 9:

$$0, x, 2x, -x, y, 2y, -y, 2x - y, 2y - x. \quad (14)$$

Все вырожденные случаи можно перечислить, приравнивая друг к другу различные пары точек (14). Опять же перебором получим следующие случаи (все числа понимаются по модулю  $L$ , т.е. не делается различия между  $x$  и  $x + L$ , например,

$$(3x = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = L/3 \\ x = 2L/3 \end{cases} :$$

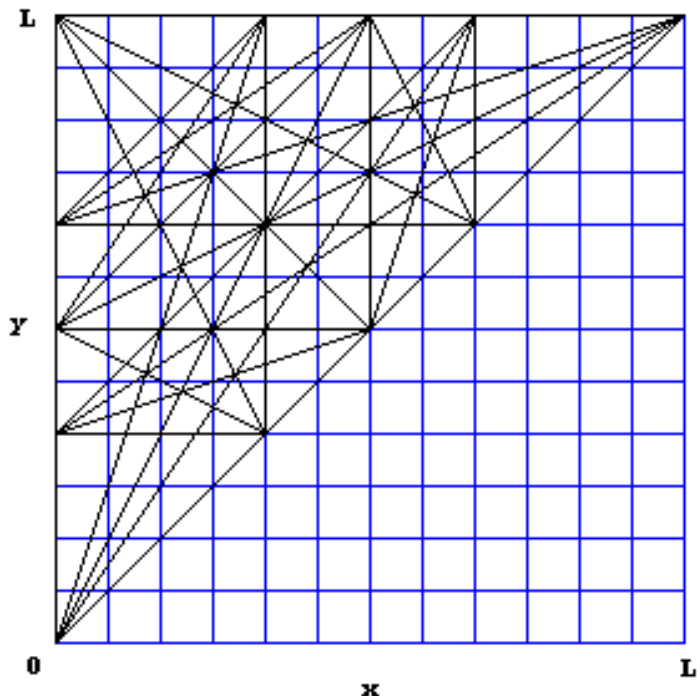
- $x = 0, 2x = 0$  (добавляется решение  $x=L/2$ ),  $y = 0, 2y = 0$ ,  
 $2x - y = 0, 2y - x = 0$ ;
- $x = y (x - y = 0), x = -y (x + y = 0), x = 2y - x (2x - 2y = 0)$ ;
- $2x = -x (3x = 0), 2x = -y (2x + y = 0), 2x = 2y - x (3x - 2y = 0)$ ;
- $-x = 2y (x + 2y = 0), -x = 2x - y (3x - y = 0)$ ;
- $2y = -y (3y = 0), 2y = 2x - y (2x - 3y = 0)$ ;

- $-y = 2y - x (x - 3y = 0)$ ;
- $2x - y = 2y - x (3x - 3y = 0)$ ;

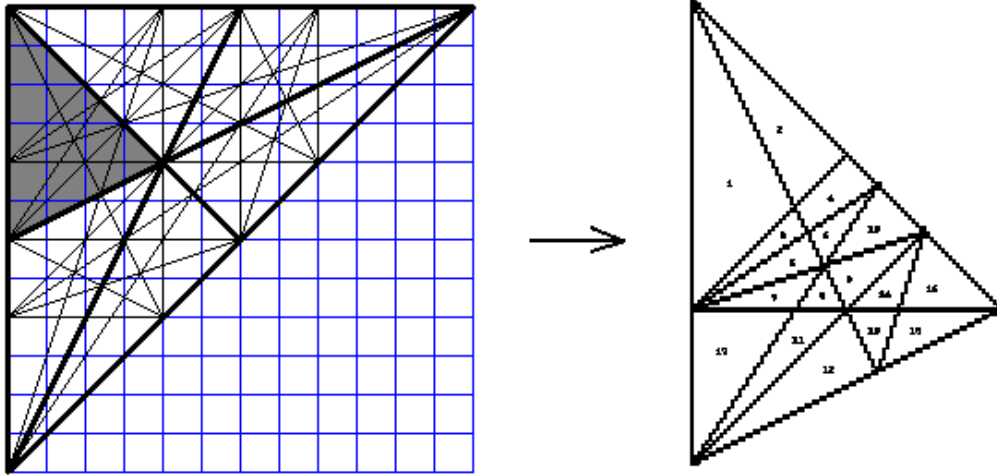
Отсюда видно, что каждое уравнение представляет собой уравнение прямой. ■

Аналогичным образом можно доказать, что для случая  $n$  точек на отрезке вырожденные случаи задаются набором гиперплоскостей.

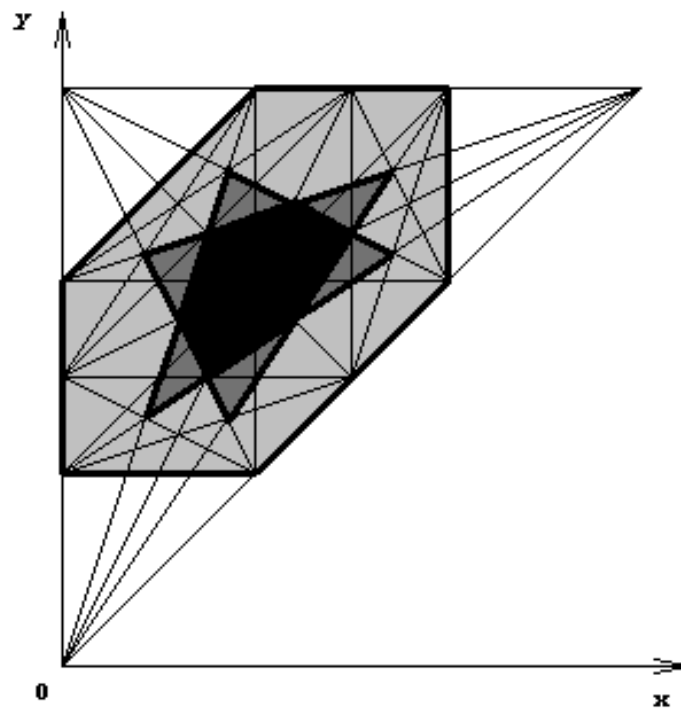
Введем *конфигурационную диаграмму* для данной задачи: по оси абсцисс будем откладывать координату  $x$  точки  $B$ , по оси ординат — координату  $y$  точки  $C$ . Т.к. мы полагаем  $y > x$ , то все возможные случаи взаимного расположения трех частиц на отрезке укладываются в треугольник с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(0, L)$ ,  $(L, L)$ . Нанесем на эту диаграмму все вырожденные случаи:



Как можно заметить, треугольник разбивается на 102 элементарные области. Каждая область характеризуется графом на  $S_3$  определенного типа. Найдем все такие типы графов. Для упрощения задачи заметим, что картина линий вырождения симметрична относительно медиан треугольника (что связано, конечно же, с произволом в выборе "названий" точек  $A, B, C$ ), а значит, достаточно рассмотреть часть конфигурационной диаграммы, заключенной, например, в треугольнике с вершинами  $(0, L)$ ,  $(0, L/2)$ ,  $(L/3, 2L/3)$ :



Графы для выделенного элемента найдены перебором и представлены в Приложении 1. На основе анализа этой диаграммы и подсчета циклов в графах получим зависимость числа элементов  $S_3$ , для которых  $\mathbb{P}_\tau \neq 0$ , от взаимного расположения точек  $A, B, C$  на отрезке. Раскрасим области в соответствии с числом циклов:



- белый цвет соответствует одному циклу (тождественная перестановка)
- светло-серый цвет соответствует двум циклам
- темно-серый цвет соответствует трем циклам

- черный шестиугольник в центре треугольника — случай четырех циклов

Получившийся результат допускает естественную интерпретацию: если места расположены примерно на одном расстоянии друг от друга, то можно устроить циклический сдвиг частиц как вправо, так и влево и плюс к этому есть циклы, в которых 2 частицы меняются местами, а третья стоит на месте. Этот случай соответствует черной области вокруг "центра масс" треугольника.

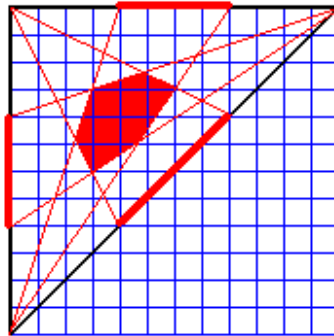
С другой стороны, если 2 (или 3) места находятся достаточно близко друг к другу, то отрезок с тождественными концами, на котором происходит движение, можно безболезненно "разомкнуть" в одной из точек, а это значит, что система в какой-то момент остановится — реализуется тождественная перестановка (123). Этот случай соответствует белым областям у углов треугольника.

### 6. Строгие результаты для случая $n$ мест:

- конфигурационная диаграмма для  $n$  мест на отрезке  $[0, L]$  есть  $(n - 1)$ - мерный симплекс  $\Delta^{n-1}$ . Если каждая конфигурация описывается точкой  $(0, x^2, \dots, x^n)$  и  $0 < x^2 < \dots < x^n < L$ , то  $\Delta^{n-1}$  есть выпуклая линейная оболочка точек  $(0, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $(0, 0, \dots, 0, L)$ ,  $(0, 0, \dots, L, L), \dots, (0, L, \dots, L, L)$ ,  $(L, L, \dots, L, L)$ .
- максимальное число циклов реализуется в окрестности центра тяжести  $\Delta^{n-1}$ .  
Центр тяжести

$$M = \frac{(0, 0, \dots, 0) + \dots + (0, L, \dots, L, L) + (L, L, \dots, L, L)}{n} = \frac{L}{n}(1, 2, \dots, n - 1).$$

- $(k - 1)$ -мерная граница  $\Delta^{n-1}$  есть конфигурационная диаграмма для случая  $k$  точек. В этом можно убедиться, совместив  $n - k$  пар мест и зафиксировав соответствующие  $n - k$  частиц. Довольно наглядно это видно из диаграммы для 3-х точек — действительно стороны треугольника разделены на 3 равных части, средние из которых соответствуют случаю 2-х циклов (один из которых — тождественная перестановка), а остальные — случаю единственного цикла из тождественной перестановки. Легко убедиться, что это диаграммы для 2-х точек.



- Предыдущее замечание в совокупности с Утверждением 4 дает нам замечательный способ раскраски  $\Delta^{n-1}$  в соответствии с числом предельных циклов без анализа каждой элементарной области — соединяя гиперплоскостями точки (отрезки, плоскости и т.д.) вырождения для конфигурационных диаграмм более низкой размерности. В частности, можно найти максимальное число циклов, которое может реализоваться на одном графе, для  $\Delta^{n-1}$ . Из топологии [6] известно, что полное число  $k$ -мерных граней в симплексе  $\Delta^n$  равно  $C_{n+1}^{k+1}$ , т.е. числу сочетаний из  $n+1$  по  $k+1$ . Если мы имеем  $n$  мест на отрезке, то максимальное число циклов равно  $C_n^2 + 1$ , т.е.  $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ . Здесь мы просуммировали уникальные "вклады" от каждого ребра симплекса  $\Delta^{n-1}$  и прибавили тождественную перестановку. Из этой формулы имеем:

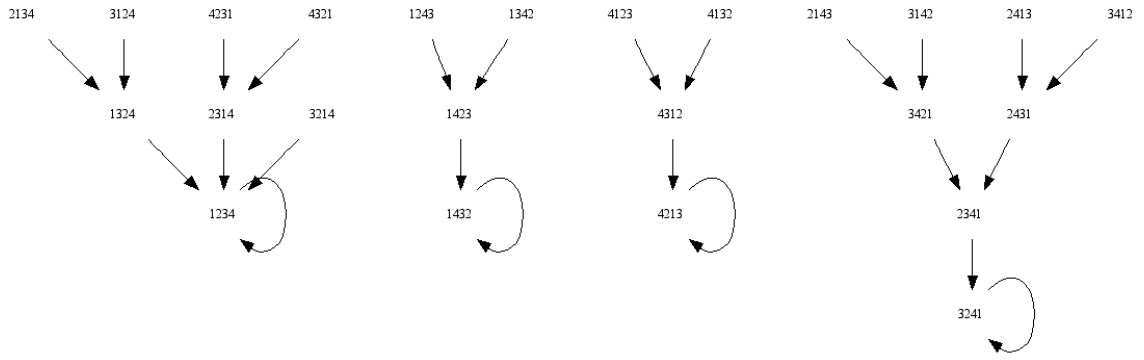
число мест	размерность симплекса	макс. число циклов
1	0	1
2	1	2
3	2	4
4	3	7
5	4	11
...	...	...
$n$	$n-1$	$\frac{n(n-1)}{2} + 1$
...	...	...

Эти данные требуют дополнительной проверки при численном моделировании, которое, однако, затруднено из-за высокой плотности линий вырождения вблизи центра тяжести соответствующего симплекса.

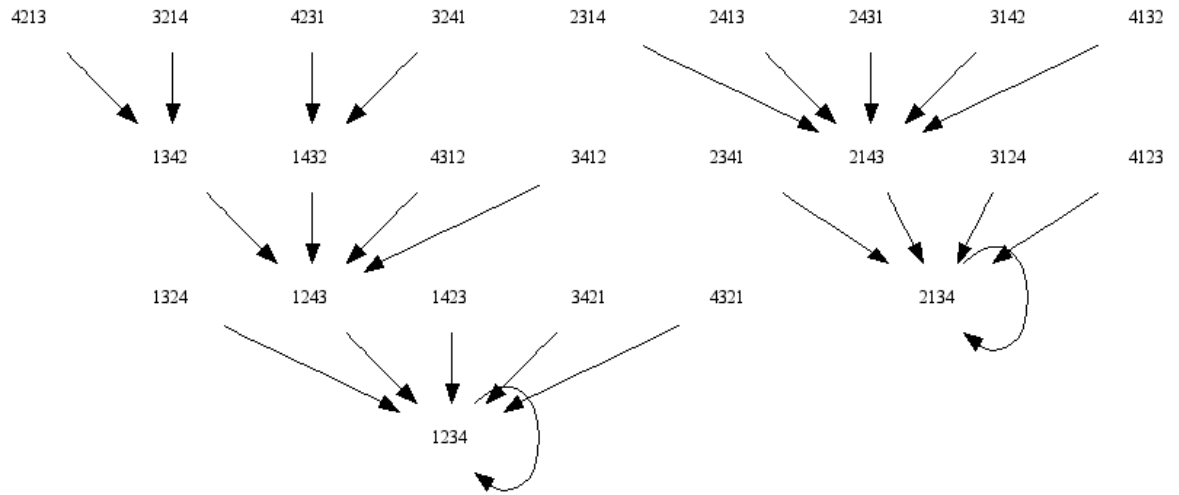
## 7. Гипотезы:

- Вклад (по объему) областей для случаев единственного цикла и максимального числа циклов уменьшается с ростом  $n$ .
- для любого  $n$  циклы представляют собой петли. Это спорное утверждение, однако при численном моделировании циклы из более чем одной вершины графа встречались только в вырожденных случаях.
- максимальная высота деревьев графа меняется незначительно при росте  $n$ . На эту мысль наводит анализ данных моделирования системы 4-х частиц. Две диаграммы для примера представлены ниже:

Конфигурация  $(0, \frac{6.001}{24}L, \frac{6.002}{24}L, \frac{17}{24}L)$ :



Конфигурация  $(0, \frac{13.856}{24}L, \frac{18.1}{24}L, \frac{18.01}{24}L)$ :



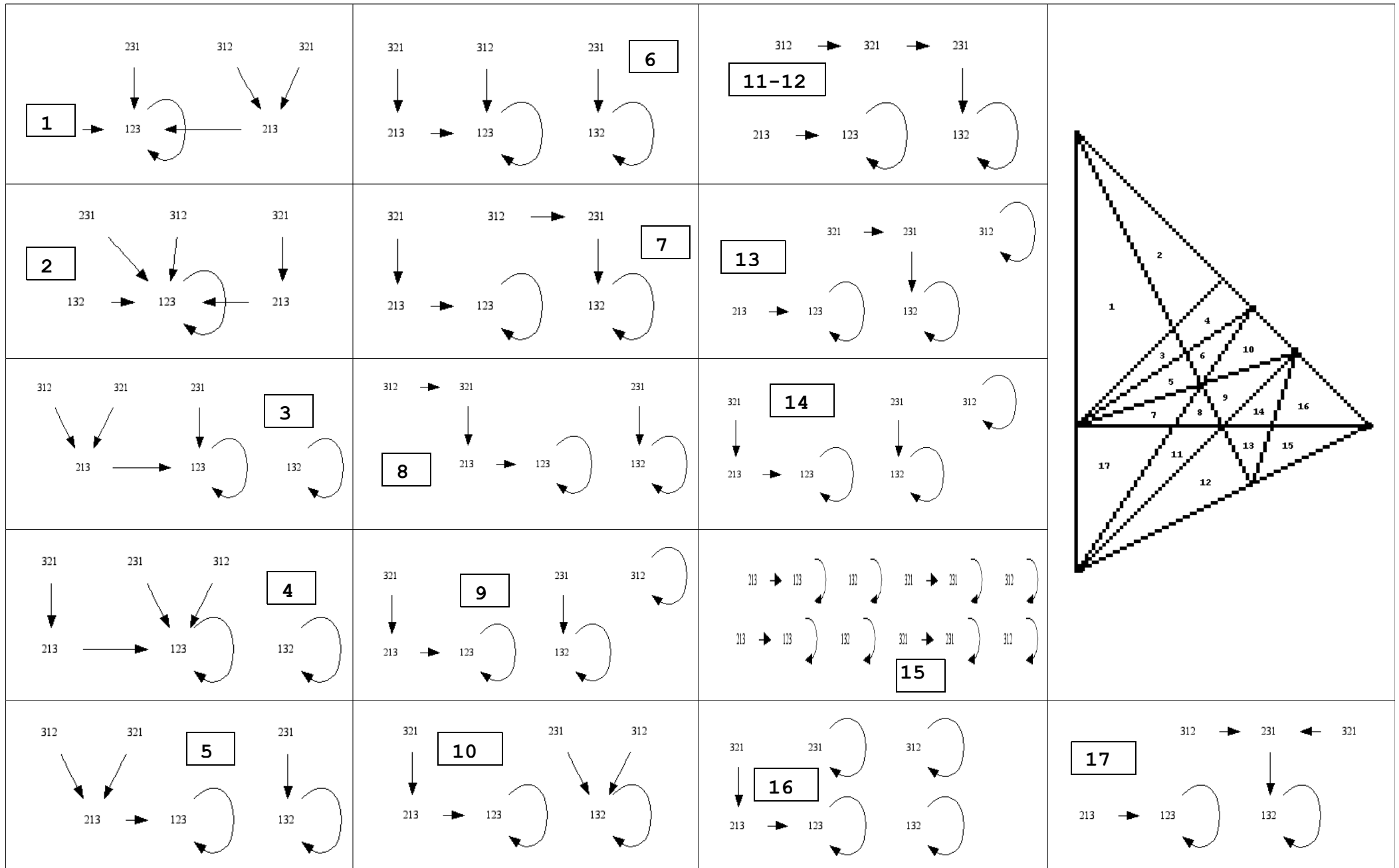
**Выводы:** В работе предложена дискретная модель идеальной жидкости, подробно рассмотрен одномерный случай и найден способ выяснения зависимости числа различных стационарных режимов для этой жидкости от взаимного расположения порождающих ее элементов, т.е. число элементов группы перестановок, для которых инвариантная вероятностная мера не равна нулю.

## Список литературы

- [1] У. Фриш "Турбулентность: Наследие А.Н. Колмогорова", М.: Фазис, 1998
- [2] В.И. Арнольд "Математические методы классической механики", М.: Наука 1974. Добавление 2.
- [3] Yann Brenier "A combinatorial algorithm for the Euler equations of incompressible flows", Computer methods in applied mechanics and engineering 75 (1989) 325-332
- [4] Р. Рокафеллар "Выпуклый анализ" М.: Мир 1973
- [5] McCann R. J., "Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps". Duke Math. J., vol. 80 (1995) 309-323.
- [6] А.Т. Фоменко "Наглядная геометрия и топология" М.: Издательство Московского университета 1998.



# Приложение 1. Элемент конфигурационной диаграммы



**Приложение 2.** Исходный текст программы, с помощью которой производилось численное моделирование динамики системы. Предназначено для Borland Turbo C++ 3.0

```
/* by Tigran Kalaidjian. 2006 */

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <string.h>

float min (float value1,float value2,float value3);
int fact(int a1);
int findcol(int stroka, int numer);
int nextpermutation(void);

const n=3; //<- (!) chislo toчек
int i,j,k;
int num[4][n],tmp;
float a[n],len,newf;
long double mnk1=1000000,mnk=0;
char control;

void main(void)
{
cout << "vvedite dlinu otrezka (FLOAT): ";
cin >> len;
for (i=0;i<n;i++)
{
cout << "vvedite koordinatu " << i+1 << "-j tochki
(FLOAT): "; cin >> a[i];
}
datae:

cout << "vvedite 1-ju perestanovku: ";
for (i=0;i<n;i++) cin >> num[1][i];
for (i=0;i<n;i++) {num[2][i]=i+1;num[0][i]=i+1;}
cout << "Use q-key to exit"<<endl;
k=3;
while (control!='q')
{
mnk1=1000000;
do {
mnk=0;
for(j=1;j<=n;j++)
{
newf=(2*a[findcol(1,j)]-a[findcol(0,j)]);
newf-=a[findcol(2,j)];
mnk+=pow(min(fabs(newf),fabs(newf+len),fabs(newf-
len)),2);
}
}
```

```

        if (mnk<mnk1) {mnk1=mnk;for(j=0;j<n;j++) num[3]
[j]=num[2][j];}
        //v 4-ju stroku snizu skladiavamo udachnie varianti.
        } while (nextpermutation()!=1);
cout << k-2 << "-ja perestanovka: ";
for(j=0;j<n;j++)      cout << 1 + findcol(0,num[1][j])<< ' ';
for(j=0;j<n;j++)
    {
        num[0][j]=num[1][j];
        num[1][j]=num[3][j];
        num[2][j]=j+1;
//      cout << num[1][j]<< ' ';

    }
cout << endl;

k++;
control=getch();
if (control=='g') goto datae;
}
}

int fact(int a1)
{
int jjot,dominiruet=1;
if (a1>0) {for(jjot=1;jjot<=a1;jjot++) dominiruet*=jjot;return
dominiruet;}
else return 1;
}

int findcol(int stroka, int numer)
{
int jj=0;
while (num[stroka][jj]!=numer) jj++;
return jj;
}

float min (float value1,float value2,float value3)
{ float prom;
  prom=((value1 <= value2) ? value1 : value2);
  return ( (prom <= value3) ? prom : value3);
}

int nextpermutation(void)
{
int result;
int k;
int t;
int y;

k = n-1;
while(k>0)
{

```

```

        if( num[2][k-1]<=num[2][k] )
        {
            break;
        }
        k = k-1;
    }
    if( k!=0 )
    {
        t = k+1;
        while(t<n)
        {
            if( num[2][t]<=num[2][k-1])
            {
                break;
            }
            t = t+1;
        }
        y = num[2][k-1];
        num[2][k-1] = num[2][t-1];
        num[2][t-1] = y;
        t = 0;
        while(t<(n-k)/2)
        {
            y = num[2][n-t-1];
            num[2][n-t-1] = num[2][k+t];
            num[2][k+t] = y;
            t = t+1;
        }
        result = 0;
    }
    else
    {
        result = 1;
    }
    return result;
}

```