

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра квантовой статистики и теории поля

РОЖДЕНИЕ ЧЕРНЫХ ДЫР В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ-ДЕ СИТТЕРА

Дипломная работа
студента 6 курса
Калайджяна Т. К.

Научный руководитель:
ст. н. с. ИППИ Соболевский А. Н.

Рецензент:
проф. Гальцов Д. В.

Допущена к защите
« » декабря 2009 г.

Зав. кафедрой
квантовой статистики и теории поля
акад. РАН Маслов В. П.

Москва
2009

Содержание

1	Введение	3
2	Трехмерное пространство анти-де Ситтера AdS_3	4
2.1	Вывод формул для геодезических	5
3	Решение уравнений Эйнштейна для точечной массы в $(2+1)$	7
4	Динамика точки в терминах группы голономий	8
5	Столкновение частиц, $\mathcal{N} = 2$	11
5.1	пространство Минковского	11
5.2	пространство анти-де Ситтера	12
6	Обобщение на случай $\mathcal{N} > 2$ в AdS_3	14
7	Шоковые волны на AdS_3	20
7.1	Вывод гравитационного решения	20
7.2	Светоподобные геодезические	22
8	Заключение	25
9	Благодарности	25
	Список литературы	25

1 Введение

Как известно, в трехмерной гравитации с отрицательной космологической постоянной существует решение типа черной дыры [1, 2], называемое BTZ-черной дырой (по именам авторов *Bañados – Teitelboim – Zanelli*):

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{J^2}{4r^2} - M \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{J^2}{4r^2} - M \right)} + r^2 (d\varphi - \frac{J}{2r^2} dt)^2, \quad (1)$$

где $a^2 \equiv -\Lambda^{-1} > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, константы M и J - масса и угловой момент соответственно.

Это решение представляет интерес с точки зрения исследования квантовых и термодинамических свойств черных дыр [3], рассмотрение которых в (3+1)-гравитации затруднено и представляет собой задачу технически более сложную, чем в (2+1) - гравитации, где поле не содержит динамических степеней свободы [4], так что пространство-время вне источников локально эквивалентно решению уравнений Эйнштейна без материи. Подобные BTZ-решения связаны также с исследованием ударных гравитационных волн (gravitational shockwaves), возникающих при движении ультрарелятивистских частиц высоких энергий [5]. Кроме того, BTZ-решения и шок-волны возникают в контексте теории струн [3] и AdS/CFT-соответствия [7, 8], так что их исследование может быть одновременно полезно для развития различных, лишь косвенно связанных друг с другом, задач.

В данной работе исследованы процессы рождения черных дыр в результате столкновения нескольких точечных безмассовых частиц в рамках классической (2+1)-гравитации с отрицательной космологической постоянной. Данное исследование может быть рассмотрено как начальный этап решения четырехмерных задач для микроскопических процессов при столкновениях частиц на ускорителях высоких энергий, либо для макроскопических процессов при столкновениях звезд. Выглядит заманчивым найти механизм, при помощи которого можно было бы понизить энергетический порог до масштабов, доступных для современной ускорительной техники, например, до ТЭВ.

На данный момент существует предположение, что микроскопические черные дыры могут образовываться при столкновениях частиц на энергиях выше массы Планка и при достаточно малом прицельном параметре [9, 10, 11, 12, 13]. В моделях со многими пространственными измерениями, где частицы Стандартной Модели помещаются на 3-брану, а гравитоны могут распространяться в дополнительных измерениях, планковский масштаб может оказаться чуть выше масштаба электрослабой теории [20, 21], т.е. как раз на уровне ТЭВ. Если какая-либо из этих моделей окажется верной, то на больших ускорителях вроде LHC (CERN) равно как и в астрофизических наблюдениях [22], кроме всего прочего, можно ожидать экспериментальные свидетельства возникновения или испарения черных дыр [14, 15, 16, 17, 18, 19]. В данной работе сделана попытка проследить за понижением энергетического порога рождения черной дыры за счет увеличения числа налетающих частиц без введения дополнительных измерений. Примечательно, что порог удается понизить, но, так или иначе, существует ограничение снизу порядка планковского масштаба – при более низких энергиях черная дыра не образуется.

В качестве основной идеи расчетов использован тот факт, что элемент группы голономий для накрытия пространственно-временной окрестности результирующей частицы алгеброй $sl(2, \mathbb{C})$ является произведением элементов группы голономий, отвечающих налетающим частицам. Эта идея и ее обоснование для двух сталкивающихся частиц были предложены

ны Н.-J.Matschull в статье [23], которая используется для введения основных обозначений и методов в нашей работе. В результате обобщения этих методов на случай нескольких частиц найден размер горизонта черной дыры, энергетические характеристики процесса (энергетический порог рождения черной дыры, зависимость порога от числа сталкивающихся частиц, ограничение на порог снизу и пр.), а также динамические свойства процесса (динамика горизонта, динамика пространства в процессе столкновения частиц).

Также в работе получено решение типа шоковой (ударной) волны на AdS_3 и найдены светоподобные геодезические для нее. Причины, по которым эти объекты вызывают интерес, связаны, опять же, с образованием черных дыр на ускорителях. Но кроме этого, с их помощью предполагается оценивать характеристики процессов столкновения тяжелых ионов на ускорителях типа RHIC (BNL). Предполагается, например, оценить снизу энтропию, производимую при столкновении ионов, энтропией черной дыры (т.е. площадью ее горизонта), возникающей при столкновении шоковых волн [8].

2 Трехмерное пространство анти-де Ситтера AdS_3

Трехмерное пространство анти-де Ситтера представляет собой максимально симметричное, односвязное, псевдориманово многообразие постоянной отрицательной кривизны и может быть параметризовано тройкой чисел (t, χ, φ) , где t вещественно, $\chi \geq 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ - радиальная и угловая пространственные компоненты, соответственно. Метрика на AdS_3 :

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\varphi^2 - \cosh^2 \chi dt^2. \quad (2)$$

Заменой радиальной координаты $r \equiv \tanh(\chi/2)$ можно перейти к представлению AdS_3 в виде бесконечно длинного цилиндра единичного радиуса в $\mathbb{R}^3$. Метрика в этом случае приводится к виду:

$$ds^2 = \left(\frac{2}{1-r^2} \right)^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2) - \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \right)^2 dt^2. \quad (3)$$

Таким образом, сечение AdS_3 плоскостями постоянного времени представляет собой единичный круг в $\mathbb{R}^2$, геометрия в котором является геометрией плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре. Абсолютотом является граница круга. Роль прямых (геодезических) выполняют содержащиеся в этом круге диаметры и дуги окружностей, перпендикулярные абсолюту. На рис. 1 показано построение одной из таких геодезических, заданной точками A и B на абсолюте. Если угловые координаты этих точек равны $\alpha \pm \beta$, причем $\alpha \in (0, 2\pi)$ то дугу APB будем называть геодезической с *центром* α и *радиусом* β . Уравнение геодезической в этих терминах будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{2r}{1+r^2} \cos(\varphi - \alpha) = \cos \beta, \quad (4)$$

где r и φ - полярные координаты в соответствии с заданной метрикой.

Следует выделить специальный класс геодезических AdS_3 , проходящих через начало координат в $r = 0$ и $t = 0$. Они могут быть заданы угловым параметром θ и скоростью $\xi \in [0, \infty]$. Уравнение, описывающее такие геодезические задается в цилиндрических координатах (t, r, φ) :

$$\begin{cases} \frac{2r}{1+r^2} = \xi \sin t \\ \varphi = \theta \end{cases} \quad (5)$$

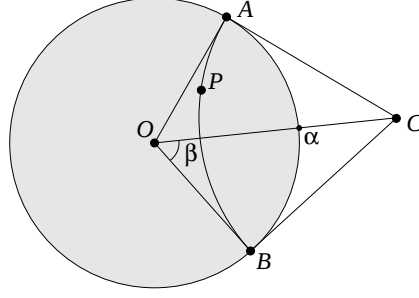


Рис. 1: Геодезическая в модели Пуанкаре

Вывод этого выражения будет дан отдельно.

Если рассматривать (5) как уравнение движения точки по AdS_3 , то ξ - это скорость точки в момент прохождения через начало координат при $t = 0$. Действительно, дифференцируя (5) по времени около точки $t = 0$ и $r = 0$, получим $2 dr = \xi dt$. Фактор 2 присутствует в метрике (3), так что физическая скорость действительно равна ξ .

При $0 \leq \xi < 1$ геодезическая времениподобная и $r = r(t)$ колеблется с периодом 2π в пределах $[-\rho, \rho]$, определенных как

$$\frac{2\rho}{1+\rho^2} = \xi. \quad (6)$$

При $\xi = 1$ геодезическая светоподобная и первое соотношение в (5) сводится к $r = \tan(t/2)$. Заметим, что точка, движущаяся по этой геодезической достигает абсолюта, причем время, необходимое для прохождения от одной точки абсолюта до другой, диаметрально противоположной, конечно и равно π .

Наконец, при $\xi = 1$ геодезическая пространственноподобная, причем (5) имеет решение только в интервале $(-\tau, \tau)$, где τ определяется как $\sin \tau = 1/\xi$. Таким образом, точка, движущаяся по пространственноподобной геодезической, проходит через весь круг быстрее, чем по светоподобной. Однако физическая длина этой геодезической, в отличие от светоподобной, бесконечна. По этой причине абсолют можно также рассматривать как пространственноподобную бесконечность.

2.1 Вывод формул для геодезических

В этом разделе будет дан вывод формул (4) и (5). Для этого потребуется перейти к представлению AdS_3 как накрывающего групповое многообразие $SL(2)$ действительных 2×2 матриц с единичным определителем. В качестве базиса в $SL(2)$ введем единичную матрицу $\mathbf{1}$ и следующие γ -матрицы

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Они формируют $\mathfrak{sl}(2)$ алгебру,

$$\gamma_a \gamma_b = \eta_{ab} \mathbf{1} - \varepsilon_{ab}^c \gamma_c, \quad (8)$$

где по соглашению $a, b = \overline{0, 2}$, для поднятия и опускания индексов используется метрика Минковского $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1)$, и ε^{abc} - символ Леви-Чивиты с $\varepsilon^{012} = 1$. Раскладывая произвольную матрицу $\mathbf{x}$ по этому базису,

$$\mathbf{x} = x_3 \mathbf{1} + x^a \gamma_a, \quad x_3 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{x}), \quad x^a = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{x} \gamma^a), \quad (9)$$

получим скаляр x_3 и вектор x^a . Условие единичности определителя выглядит как

$$x_3^2 - x^a x_a = x_3^2 + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1. \quad (10)$$

и определяет единичный гиперboloид в $\mathbb{R}^{(2,2)}$. Он не является односвязным, т.к. существует нестягиваемая петля в плоскости (x_3, x_0) . Чтобы удостовериться в том, что AdS_3 является накрывающим многообразием определим отображение $AdS_3 \rightarrow SL(2)$. В терминах координат (t, χ, φ) это отображение можно задать явно:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= e^{\frac{1}{2}(t+\varphi)\gamma_0} e^{\chi\gamma_1} e^{\frac{1}{2}(t-\varphi)\gamma_0} \\ &= \cosh \chi (\cos t \mathbf{1} + \sin t \gamma_0) + \sinh \chi (\cos \varphi \gamma_1 + \sin \varphi \gamma_2). \end{aligned} \quad (11)$$

В силу периодичности этого выражения по l отображение является взаимнооднозначным лишь в локальном смысле. Можно также убедиться прямым вычислением, что это отображение является изометрией, т.к. метрика (2) соответствует метрике Картана-Киллинга на $SL(2)$:

$$ds^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{x}^{-1} d\mathbf{x} \mathbf{x}^{-1} d\mathbf{x}) = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_0^2 - dx_3^2. \quad (12)$$

В дальнейшем нам также потребуется формула отображения в координатах (t, r, φ) :

$$\mathbf{x} = \frac{1+r^2}{1-r^2} \omega(t) + \frac{2r}{1-r^2} \gamma(\varphi), \quad (13)$$

где

$$\gamma(\alpha) = \cos \alpha \gamma_1 + \sin \alpha \gamma_2, \quad \omega(\alpha) = \cos \alpha \mathbf{1} + \sin \alpha \gamma_0. \quad (14)$$

Используя найденное соответствие найдем геодезические на $SL(2)$, а, значит, и на AdS_3 . Рассмотрим сначала геодезические, проходящие через начало координат т.е. через единичный элемент $\mathbf{1} \in SL(2)$. На групповом многообразии каждая такая геодезическая является однопараметрической подгруппой и, следовательно, состоит из элементов $\mathbf{x}(s) = e^{s\mathbf{n}}$, $s \in \mathbb{R}$, где $\mathbf{n} = n^a \gamma_a$ вектор из алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Без ограничения общности можно положить $\mathbf{n} = \gamma_0 + \xi \gamma(\theta)$, тогда

$$\mathbf{x}(s) = e^{s\mathbf{n}} = \text{cs } s \mathbf{1} + \text{sn } s (\gamma_0 + \xi \gamma(\theta)), \quad (15)$$

где функции sn и cs определены так, что

$$\text{sn } s = \frac{\sinh(s\sqrt{\xi^2 - 1})}{s\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{\sin(s\sqrt{1 - \xi^2})}{s\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (16)$$

$$\text{cs } s = \cosh(s\sqrt{\xi^2 - 1}) = \cos(s\sqrt{1 - \xi^2}). \quad (17)$$

Сравнивая это с (13), находим следующее соотношение с координатами и параметром s :

$$\frac{1+r^2}{1-r^2} \cos t = \text{cs } s, \quad \frac{1+r^2}{1-r^2} \sin t = \text{sn } s, \quad \frac{2r}{1-r^2} = \xi \text{sn } s, \quad (18)$$

и $\varphi = \theta$. Исключая s из двух последних уравнений, получаем, что (5) действительно описывает геодезические, проходящие через начало координат.

Для нахождения всех прочих геодезических следует заметить, что AdS_3 максимально симметрично и каждая геодезическая может быть получена действием некоторой изометрии

на геодезическую, проходящую через фиксированную точку. Общий вид изометрии для $\mathrm{SL}(2)$ (исключая пространственные и временные отражения) выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{h}, \quad \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathrm{SL}(2). \quad (19)$$

Отвечающая ей изометрия на AdS_3 определяется с точностью до временных сдвигов $t \mapsto t + 2\pi z$, $z \in \mathbb{Z}$. Таким образом, выражение (19) для геодезической записывается как

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{g}^{-1} e^{s \mathbf{n}} \mathbf{h}, \quad \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathrm{SL}(2), \quad \mathbf{n} \in \mathfrak{sl}(2). \quad (20)$$

Далее, выбирая

$$\mathbf{g} = e^{-\frac{1}{2}\zeta \gamma(\alpha)} e^{-\frac{1}{2}\tau \gamma_0}, \quad \mathbf{h} = e^{\frac{1}{2}\zeta \gamma(\alpha)} e^{\frac{1}{2}\tau \gamma_0}, \quad \mathbf{n} = \gamma'(\alpha), \quad (21)$$

получаем

$$\mathbf{x}(s) = \cosh \zeta \cosh s \omega(\tau) + \sinh \zeta \cosh s \gamma(\alpha) + \sinh s \gamma'(\alpha). \quad (22)$$

Если сравнить это выражение с (13), то окажется, что оно описывает кривую внутри диска Пуанкаре при $t = \tau$ и следующих соотношениях на r , φ и s :

$$\cosh \zeta \cosh s = \frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad \sinh s = \frac{2r}{1-r^2} \sin(\varphi - \alpha), \quad (23)$$

$$\sinh \zeta \cosh s = \frac{2r}{1-r^2} \cos(\varphi - \alpha). \quad (24)$$

Опять же, исключая s получим

$$\frac{2r}{1+r^2} \cos(\varphi - \alpha) = \tanh \zeta, \quad (25)$$

что совпадает с (4) при замене $\cos \beta = \tanh \zeta$.

Итак, доказано, что геодезические описываются уравнениями (4) и (5), а также найдено соответствие $AdS_3 \rightarrow \mathrm{SL}(2)$, существование которого пригодится в дальнейшем.

3 Решение уравнений Эйнштейна для точечной массы в (2+1)

Для дальнейшего изложения потребуется выяснить, как устроено пространство в окрестности точечной массивной частицы в (2+1). Рассмотрим сначала случай нулевой космологической постоянной [4]. Точечные массы (всего $\mathcal{N}$) покоятся, имеют радиус-векторы $\vec{r}_i$ и массы m_i , $i = \overline{1, \mathcal{N}}$.

Уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0, 2} \quad (26)$$

где тензор энергии-импульса имеет только (00)-компоненту:

$$T_{\mu\nu} = \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (27)$$

Будем искать решение в виде не зависящей от времени изотропной метрики ($\phi = \phi(\vec{r})$):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix} \quad (28)$$

Получим выражения для связности

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\mu}^0 &= \Gamma_{0\mu}^\lambda = \Gamma_{\mu 0}^\lambda = 0, & \lambda, \mu &= \overline{0, 2} \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2\phi} \{ \delta_{ik} \partial_j \phi + \delta_{ij} \partial_k \phi - \delta_{jk} \partial_i \phi \} & i, j, k &= \overline{1, 2} \end{aligned} \quad (29)$$

И, в итоге, пропуская анзац (28) через уравнения Эйнштейна и выделяя лишь нетривиальные выражения, получаем уравнение на ϕ :

$$\nabla^2 \ln \phi = -16G \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (30)$$

Сравнивая с выражением для функции Грина оператора Лапласа

$$\nabla^2 \ln r = 2\pi \delta(\vec{r}), \quad (31)$$

получаем решение:

$$\phi = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} |\vec{r} - \vec{r}_i|^{-8Gm_i} \quad (32)$$

Для простоты рассмотрим случай одной частицы в начале координат. Элемент длины записывается как

$$dl^2 = r^{-8Gm} [dr^2 + r^2 d\varphi^2], \text{ где } r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi] \quad (33)$$

Выполним замену переменных

$$\rho = \alpha^{-1} r^\alpha, \text{ и } \bar{\varphi} = \alpha \varphi, \alpha \equiv 1 - 4mG \quad (34)$$

и элемент длины будет выглядеть как в случае плоского пространства, однако угловая компонента пробегает более короткий отрезок значений:

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\bar{\varphi}^2, \text{ где } \rho \in [0, \infty), \bar{\varphi} \in [0, 2\pi\alpha]. \quad (35)$$

Таким образом, пространственная окрестность массивной точки является конусом с углом развертки $2\pi\alpha$, зависящим от ее массы.

Случай ненулевой космологической постоянной аналогичным образом рассмотрен в [6]. Окрестность массивной точки и в этом случае является конической.

4 Динамика точки в терминах группы голономий

В этом разделе будет рассмотрен способ добавления материальной точки (частицы) в пространство Минковского и AdS_3 в том случае, когда точка движется. Этот способ представляет собой совокупность *вырезания* части пространства и *склеивания* [24, 25] получившихся границ по определенному правилу.

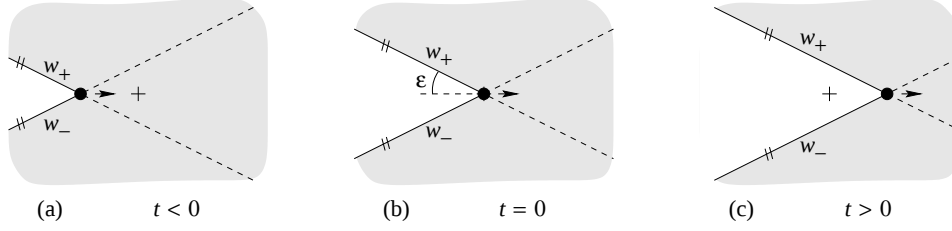


Рис. 2: Процедура вырезания и склеивания в пространстве Минковского

Рассмотрим сначала плоское пространство Минковского (координаты (t, x, y)), изоморфное алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, т.е. спинорному представлению трехмерной алгебры группы Лоренца:

$$\mathbf{z} = t \gamma_0 + x \gamma_1 + y \gamma_2. \quad (36)$$

Такой изоморфизм позволит затем перенести все результаты на AdS_3 практически без изменений.

Преобразование Лоренца может быть задано групповым элементом $\mathbf{u}$, действующим по присоединенному представлению:

$$\mathbf{z} \mapsto \mathbf{u}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathrm{SL}(2). \quad (37)$$

Неподвижные точки преобразования (37) представляют собой все матрицы $\mathbf{z}$, коммутирующие с $\mathbf{u}$. Выберем в качестве $\mathbf{u}$ матрицу следующего вида:

$$\mathbf{u} = u \mathbf{1} + p^a \gamma_a, \quad \mathbf{p} = p^a \gamma_a, \quad (38)$$

где p^a - компоненты 3-импульса частицы. В этом случае сам вектор $\mathbf{p}$ и мировая линия частицы не меняются при преобразованиях Лоренца (37). Еще не фиксированная компонента u может быть выбрана таким образом, что матрицы $\mathbf{u}$ будут принадлежать группе голономий для накрытия пространства с частицей, формирующей коническую сингулярность с углом (34), плоским пространством Минковского без вырезанных углов (а значит и алгеброй $\mathfrak{sl}(2)$). Другими словами, переносу произвольного вектора f^a в базе накрытия (в пространстве с частицей) вокруг конической сингулярности по замкнутому пути будет соответствовать преобразование (37) над матрицей $f^a \gamma_a$ в накрывающем пространстве $\mathfrak{sl}(2)$. Способом задания u оказывается условие нахождения частицы на «массовой поверхности» [25]

$$\frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\mathbf{u}) = \cos m, \quad 0 \leq m \leq \pi. \quad (39)$$

Другими словами, этим условием задается матрица $\mathbf{u}$, описывающая поворот на полный угол $2\pi\alpha$ вокруг конической сингулярности. Здесь и далее для упрощения записи мы используем систему единиц, в которой $G = 1/4\pi$, матрицы $\mathbf{u}$ будем называть «голономиями». В наших единицах ограниченность массы сверху в (39) означает, по сути, ограничение планковским масштабом $M_{pl} = \frac{c^2}{G}$.

Далее, с учетом результатов предыдущего раздела, окрестность частицы может быть представлена как плоское пространство с вырезанным клином. Клин ограничен двумя полуплоскостями, пересекающимися по мировой линии частицы. При склеивании получившегося пространства по этим полуплоскостям с помощью указанного преобразования Лоренца, вновь получится плоское пространство (исключая саму мировую линию), т.к. это преобразование является изометрией на пространстве Минковского.

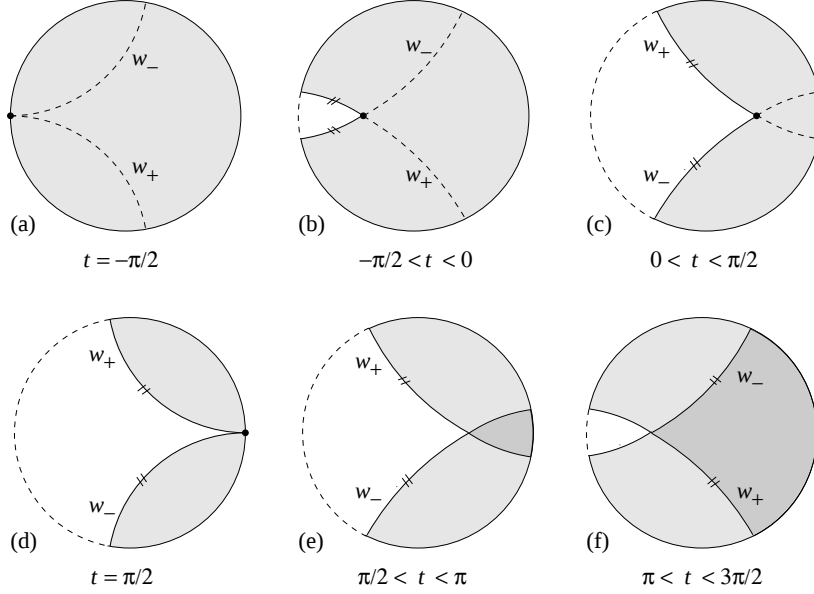


Рис. 3: Процедура вырезания и склейки для AdS_3

Если рассматривать полученное пространство в различные моменты времени, то полу-плоскости, ограничивающие клин, представляются лучами $w_{\pm}$. В частном случае, когда безмассовая частица движется по оси x , голономия принимает вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{1} + \tan \epsilon (\gamma_0 + \gamma_1), \quad 0 < \epsilon < \pi/2, \quad (40)$$

где полная энергия частицы (коэффициент при γ_0) однозначно задается параметром ϵ . Точки на лучах $w_{\pm}$ представляются в $\mathfrak{sl}(2)$ как

$$\mathbf{w}_{\pm} = t \gamma_0 + x \gamma_1 \pm y \gamma_2. \quad (41)$$

Осюда, из условия склейки $\mathbf{w}_+ = \mathbf{u}^{-1} \mathbf{w}_- \mathbf{u}$ с необходимостью вытекает условие $y = (t - x) \tan \epsilon$, т.е. лучи ограничивают угол, лежащий симметрично относительно вектора 2-импульса, впереди или позади частицы с раствором 2ϵ (см.рис. 2). Можно показать, что при выборе движения частицы под углом к оси x этот угол можно выбирать по тому же правилу, т.е. симметрично относительно вектора 2-импульса.

В случае AdS_3 будем задавать начало координат таким образом, чтобы частица через нее проходила в процессе движения. По аналогии с плоским пространством точки мировой линии частицы являются неподвижными по отношению к изометриям пространства. В силу того, что одной из этих точек является начало координат, то к общему варианту изометрии (19) прибавляется условие $\mathbf{g} = \mathbf{h}$, т.к. соответствующее преобразование в $SL(2)$ не меняет единицы группы $\mathbf{1}$ и принимает вид

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in SL(2). \quad (42)$$

Причем $\mathbf{u}$ может быть снова рассмотрена как голономия частицы в случае, если частица находится вблизи начала координат, т.к. в ее окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{1} + \mathbf{z} + \dots$, где $\mathbf{z} \in \mathfrak{sl}(2)$. Таким образом, на касательный вектор $\mathbf{z}$ (из касательной плоскости), отображение (42) действует

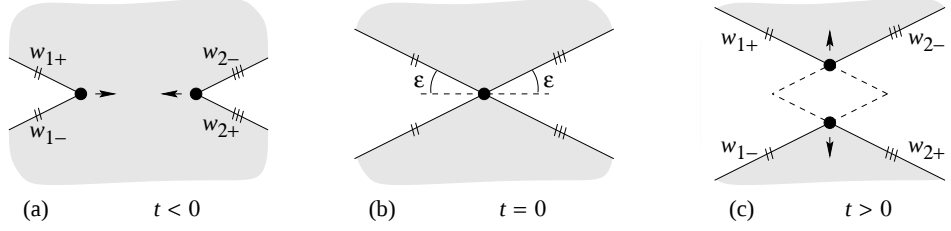


Рис. 4: Процесс столкновения и объединения 2-х частиц в плоском случае.

так же, как и (37). Проводя аналогичные плоскому случаю размышления, можно получить, что под действием преобразования $\mathbf{u}$ геодезическая

$$\mathbf{x}(s) = e^{s\mathbf{P}}, \quad s \in \mathbb{R} \quad (43)$$

остается неподвижной, а «лучи» (в смысле геометрии Лобачевского) вырезаемого угла для безмассовой частицы, движущейся по показанной на рис. 3 геодезической задаются соотношением:

$$w_{\pm} : \quad \frac{2r}{1+r^2} \sin(\epsilon \pm \varphi) = \sin t \sin \epsilon. \quad (44)$$

5 Столкновение частиц. $\mathcal{N} = 2$

5.1 пространство Минковского

В случае, когда частицы сталкиваются и объединяются, голономией результирующей частицы является произведение голономий каждой из частиц, участвующих в процессе. Такое правило позволяет получать кинематические и динамические характеристики процесса (например, энергии получающихся частиц, их массы и пр.), не прибегая к рассмотрению задачи на уровне уравнений Эйнштейна. В справедливости этого подхода можно убедиться на примере 2-х безмассовых частиц в пространстве Минковского, движущихся навстречу друг другу по оси x . Их голономии

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{1} + \tan \epsilon (\gamma_0 + \gamma_1), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{1} + \tan \epsilon (\gamma_0 - \gamma_1). \quad (45)$$

Рассмотрим момент столкновения (рис. 4(b)). Для того, чтобы перенести произвольный вектор из верхней части пространства против часовой стрелки по замкнутому пути вокруг образовавшейся частицы, нужно, кроме всего прочего, пронести его сперва через левый угол, а затем через правый. В соответствии с правилом склейки сторон этих углов (из пред. раздела) в первом случае нужно подействовать преобразованием $\mathbf{u}_1^{-1}$, а во втором - преобразованием $\mathbf{u}_2^{-1}$ на представление вектора в $\mathfrak{sl}(2)$. Получившаяся композиция преобразований будет соответствовать голономии $\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1$. По аналогии, для вектора из нижней части пространства $\mathbf{u}_- = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2$. В данном случае, получаем два представления для одной результирующей частицы:

$$\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 = (1 - 2 \tan^2 \epsilon) \mathbf{1} + 2 \tan \epsilon (\gamma_0 + \tan \epsilon \gamma_2), \quad (46)$$

$$\mathbf{u}_- = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 = (1 - 2 \tan^2 \epsilon) \mathbf{1} + 2 \tan \epsilon (\gamma_0 - \tan \epsilon \gamma_2). \quad (47)$$

Первый случай описывает движение вверх по оси y , второй - вниз. Энергия результирующей частицы равна сумме энергий первоначальных. Этот способ, очевидно, можно распространить на более широкий класс задач (движение под произвольными углами, движение

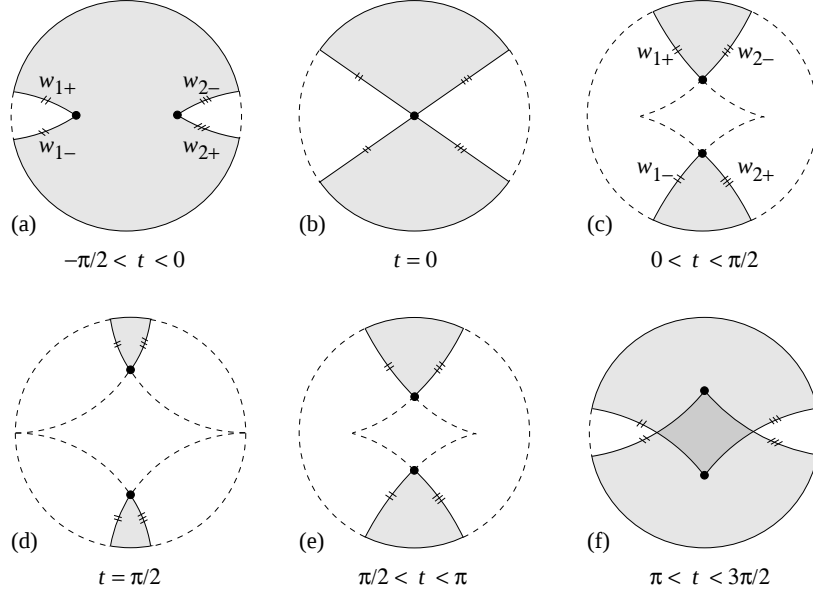


Рис. 5: Процесс столкновения и объединения 2-х частиц в AdS_3 .

массивных частиц и пр.), лишь бы вырезаемые углы позади или впереди частиц не пересекались.

Следует также заметить, что в случае $0 < \epsilon < \pi/4$ в рис. 46 результирующая частица приобретает массу, выражение для которой можно получить из условия (39):

$$\sin(m/2) = \tan \epsilon. \quad (48)$$

В случае же $\epsilon > \pi/4$ результат нельзя интерпретировать как частицу с массой или безмассовую частицу, т.к. уравнение имеет мнимое решение. Этот результат имеет непосредственное отношение к процессу образования черных дыр на AdS_3 .

5.2 пространство анти-де Ситтера

В этом разделе рассмотрим столкновение и объединение двух безмассовых частиц в AdS_3 . На рис. 5 изображен случай, когда энергия каждой из них лежит ниже порога, соответствующего $\epsilon^{(threshold)} = \pi/4$. Голономии частиц описываются выражениями (45). Обе мировые линии являются светоподобными геодезическими, проходящими через начало координат и берущие начало из абсолюта в момент времени $t = -\pi/2$. Лучи вырезаемых углов описываются соотношениями:

$$w_{1\pm} : \quad \frac{2r}{1+r^2} \sin(\epsilon \pm \varphi) = \sin t \sin \epsilon, \quad (49)$$

$$w_{2\pm} : \quad \frac{2r}{1+r^2} \sin(\epsilon \pm \varphi) = -\sin t \sin \epsilon. \quad (50)$$

В моменты времени $t \approx 0$ обе частицы находятся в окрестности начала координат и, следовательно, к ним применимы соображения для случая пространства Минковского. Представления результирующей частицы движутся по пересечениям геодезических w_{1+} , w_{2-} и

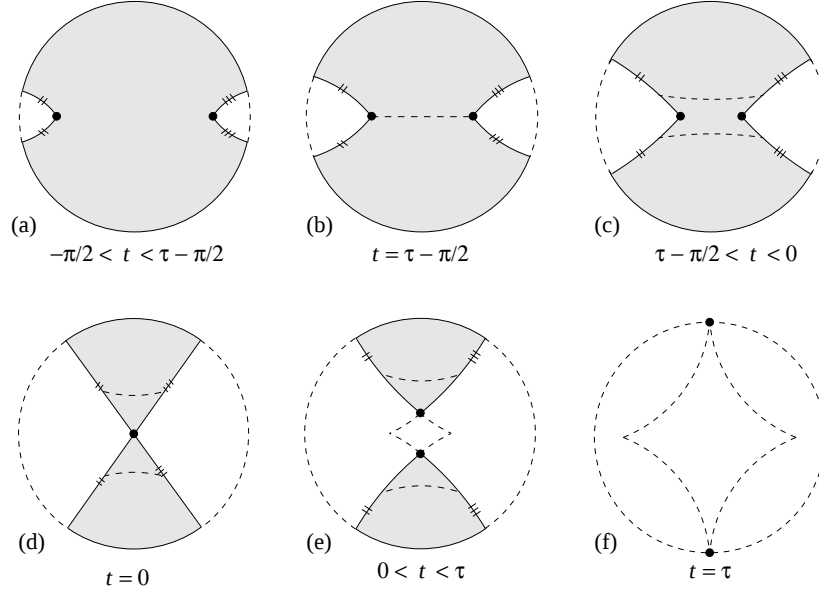


Рис. 6: Рождение черной дыры

w_{1-}, w_{2+} , соответственно, а, значит, их общая радиальная компонента удовлетворяет соотношению:

$$\frac{2r}{1+r^2} = \sin t \tan \epsilon. \quad (51)$$

Это уравнение геодезической рис. 5, и, соответственно, от величины ϵ зависит, будет ли она времениподобной и процесс будет колебательным, светоподобной с достижением абсолюта или же пространственноподобной.

Последний случай возможен при $\epsilon > \epsilon^{(threshold)} = \pi/4$. Он изображен на рис. 6. Под *черной дырой* понимается область AdS_3 причинно не связанная с абсолютом, а под *горизонтом* граница этой области. Это действительно возможно, если представления результирующей частицы движутся быстрее скорости света $\xi = 1$.

Одно из следствий формулы (51) - достижение абсолюта пространственноподобными геодезическими за время $t = \tau$, определяющееся соотношением

$$\sin \tau = \cot \epsilon, \quad 0 < \tau < \pi/2. \quad (52)$$

Соответственно, пространство к моменту времени $t = \tau$ вырождается в точку Υ , представленную на абсолюте двумя точками.

Определим, где находится черная дыра в нашем определении и какова длина ее горизонта. Следует заметить, что весь абсолют является причинно связанным с Υ , т.к. из (3) следует, что свет распространяется по абсолюту со скоростью $d\varphi/dt = 1$, в то время как концы кривых $w_{1\pm}$ и $w_{2\pm}$ на абсолюте движутся медленнее (время, требуемое им для прохождения четверти абсолюта равно $\tau + \pi/2 > \pi/2$). Следовательно, горизонт не пересекает абсолюта, а находится во внутренности диска. Горизонт представляет собой, очевидно, сечение светового конуса (с вершиной в Υ и радиусом $\tau - t$) плоскостями фиксированного времени. Другими словами, для того, чтобы найти горизонт, следует в момент $t = \tau$ пустить время вспять и одновременно выпустить свет во всех направлениях из Υ (верхней

и нижней точек). Получившийся световой фронт (две геодезических, которые, с учетом склейки сторон вырезанных углов, формируют подобие окружности) и будет горизонтом, т.к. отделяет причинно несвязанные области. Концы этих геодезических движутся по абсолюту со скоростью $d\varphi/dt = 1$ и, следовательно, к моменту времени $\tau - \pi/2$ черная дыра вырождается в отрезок. Этот момент можно считать моментом рождения черной дыры при прямом течении времени.

Размер черной дыры в момент рождения равен

$$2 \int_{-\rho}^{\rho} \frac{2}{1-r^2} dr = 8 \operatorname{arctanh} \rho \equiv 2\mu, \quad (53)$$

где $\rho = \tan(\tau/2 - \pi/4)$ - радиальная координата частиц в этот момент и μ - некий параметр. Используя (52), его можно определить как

$$\cosh(\mu/2) = \tan \epsilon. \quad (54)$$

То есть, если сравнить с (48), μ является аналитическим продолжением массы покоя частицы. Причем, замечая, что

$$\cosh \mu = \tan^2 \epsilon - 1, \quad (55)$$

можно получить значение μ , то есть половину длины горизонта, из голономии частицы

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\mathbf{u}) = -\cosh \mu. \quad (56)$$

Если провести аналогичные вычисления для произвольного момента времени после образования черной дыры, то оказывается, что длина горизонта не меняется по сравнению с величиной, определенной соотношением (53). Таким образом, длина горизонта черной дыры в произвольный момент времени содержится в голономии результирующей частицы.

6 Обобщение на случай $\mathcal{N} > 2$ в AdS_3

Рассмотрим случай нескольких частиц, сталкивающихся в начале координат в момент времени $t = 0$. По общему правилу обхода конической сингулярности голономия результирующей частицы (в одном из представлений) будет равна произведению голономий налетающих частиц:

$$\mathbf{u}_{res} = \mathbf{u}_{\mathcal{N}} \mathbf{u}_{\mathcal{N}-1} \dots \mathbf{u}_1, \quad (57)$$

а также циклические перестановки индексов для других представлений. Отличие от $\mathcal{N} = 2$ состоит в том, что здесь важно учитывать порядок в произведении. Можно проверить, что если исходные частицы нумеруются против часовой стрелки, то произведение следует брать в обратном порядке, как в (57), а если по часовой, то в прямом порядке.

В случае, когда налетающие частицы безмассовые, одной энергии и расположены симметрично по отношению к началу координат (в вершинах правильного многоугольника), то голономии каждой из них можно записать в виде:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{1} + \tan \epsilon (\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\frac{2\pi i}{\mathcal{N}}) + \gamma_2 \sin(\frac{2\pi i}{\mathcal{N}})), \quad i = \overline{1, \mathcal{N}} \quad (58)$$

При этом компоненту при $\mathbf{1}$ голономии результирующей частицы можно найти прямым вычислением как след произведения голономий (циклическая перестановка матриц

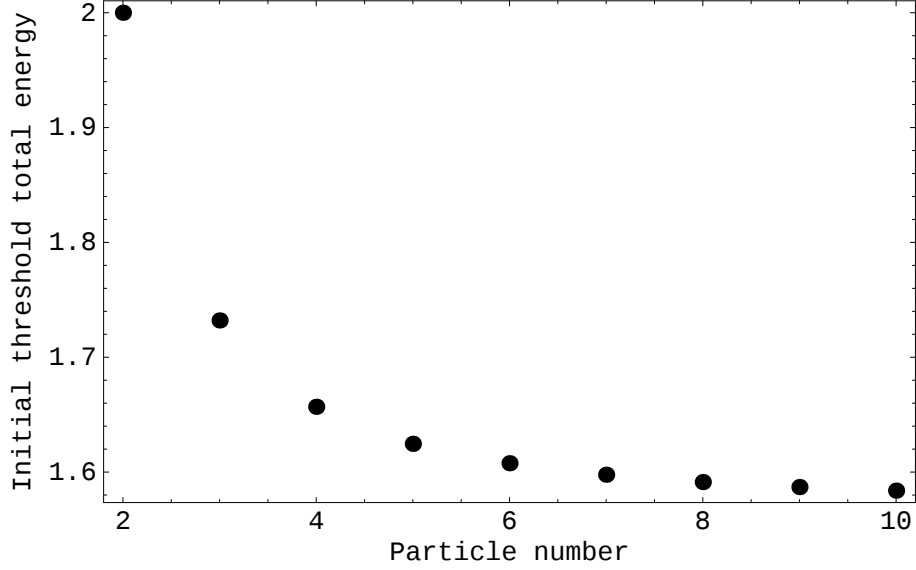


Рис. 7: Зависимость полной пороговой энергии налетающих частиц от их числа

под знаком $\text{Tr}()$ не меняет результата, что согласуется с тем, что мы имеем дело с различными представлениями *одной* результирующей частицы). Несколько частных случаев указаны в таблице.

$$u_{res} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{u}_{res}), \quad \Delta \equiv \tan^2 \epsilon$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} = 2 & \quad 1 - 2\Delta^2 \\
\mathcal{N} = 3 & \quad \frac{1}{2}(2 - 3\Delta^2(3 + \sqrt{3}\Delta)) \\
\mathcal{N} = 4 & \quad 1 - 2\Delta^2(2 + \Delta)^2 \\
\mathcal{N} = 5 & \quad \frac{1}{8}(8 + 5\Delta^2(-20 + \Delta(-\sqrt{2}(5 + \sqrt{5})^{3/2} - 2\Delta(-5 + 5^{3/2} + \sqrt{50 - 22\sqrt{5}\Delta}))))
\end{aligned} \tag{59}$$

При рассмотрении нескольких частных случаев оказывается, что пороговое значение параметра ϵ (то есть, значение, при котором $u_{res} = -1$, и выше которого рождается черная дыра) выражается как $\epsilon_i^{(threshold)} = \frac{\pi}{2\mathcal{N}}$, что позволяет сделать естественное предположение:

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \epsilon_i^{(threshold)} = \frac{\pi}{2}, \quad \mathcal{N} = 2, 3, 4, \dots \tag{60}$$

Аналитический вывод показал, что в указанном симметричном случае и при равенстве начальных энергий это соотношение выполняется вплоть до $\mathcal{N} = 40$. Дальнейшее вычисление, как и доказательство в общем виде, пока довольно затруднительно. Однако уже из этого результата следует, что увеличением числа частиц можно снизить энергетический порог образования черной дыры (см. рис.). Однако более интересно, что, если эта зависимость будет выполняться при произвольном числе частиц, то порог все равно не получится

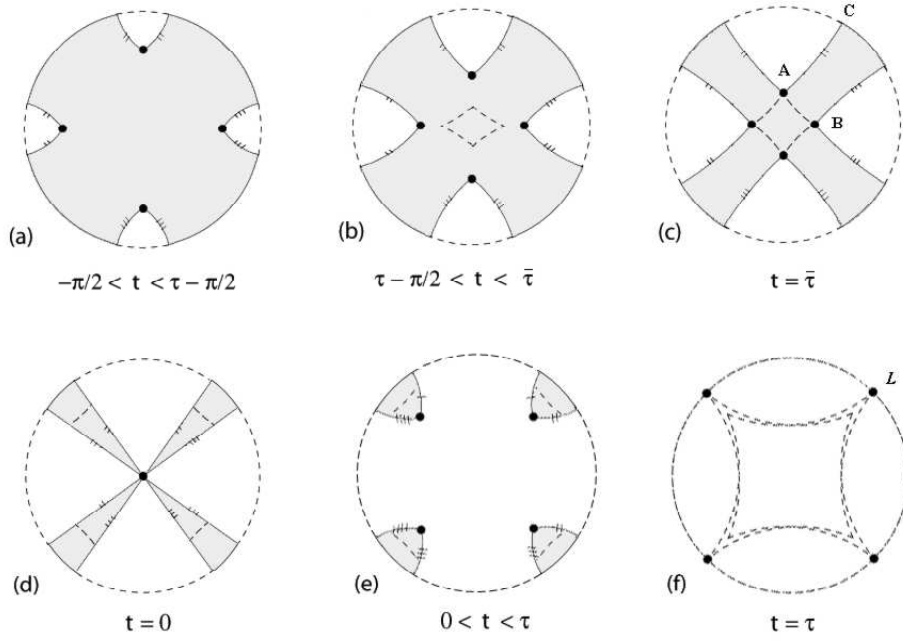


Рис. 8: Процесс столкновения 4-х одинаковых частиц с энергией выше порога

опустить существенно ниже планковского масштаба:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \sim M_{pl} \quad (61)$$

Таким образом, выглядит сомнительным предположение, что удастся понизить порог рождения черных дыр при столкновении пучков частиц вместо одиночных. Надо иметь в виду, однако, что этот результат существенно зависит от геометрии пространства, в котором он получен.

Отдельно остановимся на случае $\mathcal{N} = 4$. Как видно из рисунка, процесс похож на случай 2-х частиц, однако горизонт возникает раньше, чем частицы входят под него (момент входа $t = \bar{\tau}$), а не одновременно. Выразим этот момент времени через энергетический параметр ϵ

Пользуясь аналогичными соображениями, как для $\mathcal{N} = 2$, получаем момент вырождения пространства в точку:

$$\tau = \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\cot \epsilon - 1)\right]. \quad (62)$$

Момент $\bar{\tau}$ входа под горизонт получаем, например, из условия совпадения координаты частицы A на рис.(с) и координаты точки $\varphi = \pi/2$ геодезической AB .

$$\bar{\tau} = -\arctan\left[\frac{\cos \tau}{2^{-1/2} + \sin \tau}\right] \quad (63)$$

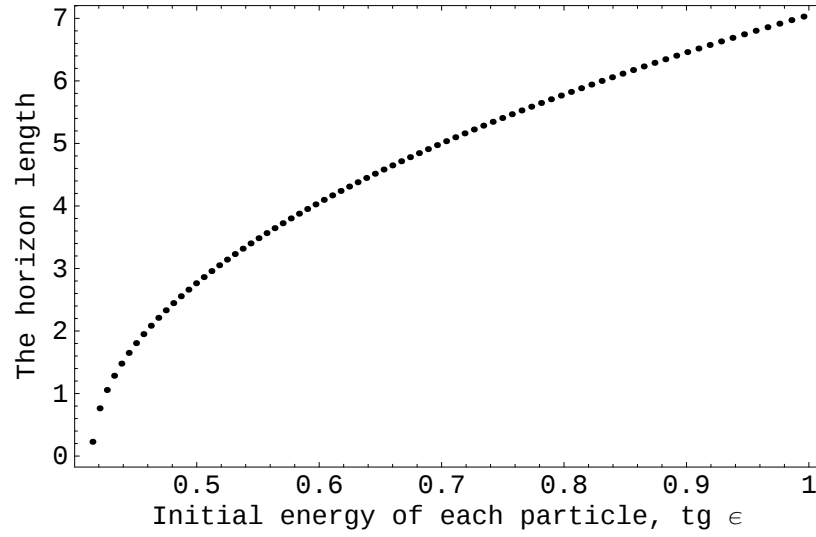
Далее находим уравнение этой геодезической в момент времени $\bar{\tau}$

$$r = r(\varphi) = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}, \quad \text{где } \xi \equiv \frac{\cos(\tau - \bar{\tau})}{\sin \varphi} \quad (64)$$

И находим длину горизонта

$$l = 4 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{2}{1-r^2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi \quad (65)$$

Результат численного расчета показан на рис.:



Отсюда можно заметить, что размер горизонта при одинаковой полной начальной энергии можно изменить, увеличив количество частиц (первый график отвечает случаю $\mathcal{N} = 2$, второй - $\mathcal{N} = 4$):

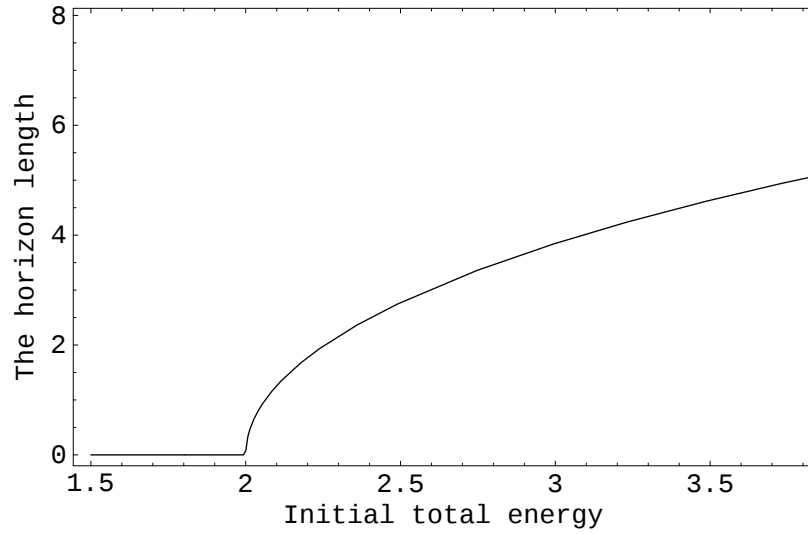


Рис. 9: Размер горизонта для $\mathcal{N} = 2$

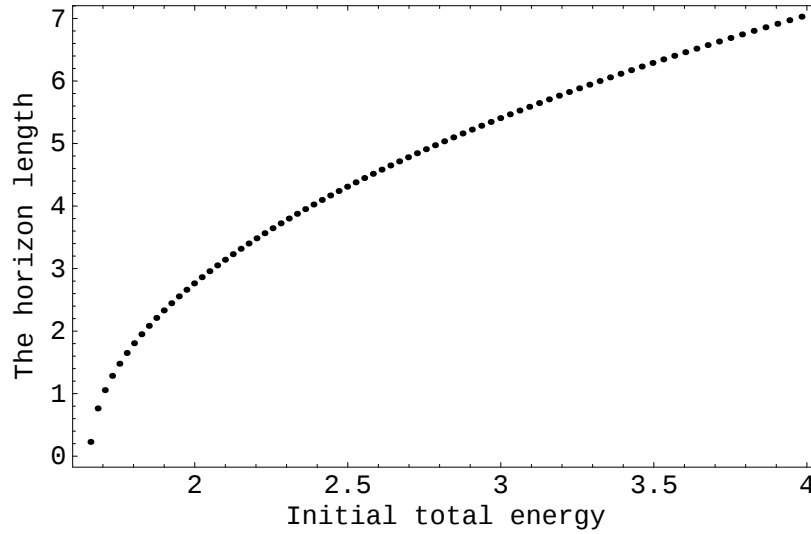


Рис. 10: Размер горизонта для $\mathcal{N} = 4$

Дальнейшие вычисления показали, что длина горизонта в случае 4-х частиц, как ожидалось («No Hair Theorem»), не меняется после того, как частицы заходят под горизонт, а до этого момента растёт по закону, близкому к линейному. Небольшое отклонение от линейности происходит при больших начальных энергиях. На следующих рисунках показан результат расчетов для случаев $\epsilon = \pi/7$ (первый график) и $\epsilon = \pi/4$ (второй график), по шкале времени отложен полный интервал от момента образования, до момента входа частиц под горизонт.

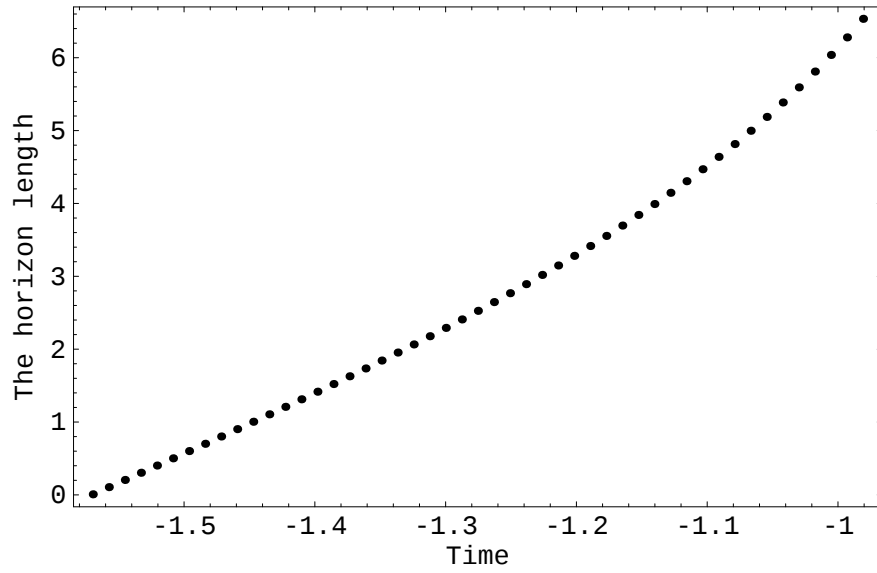
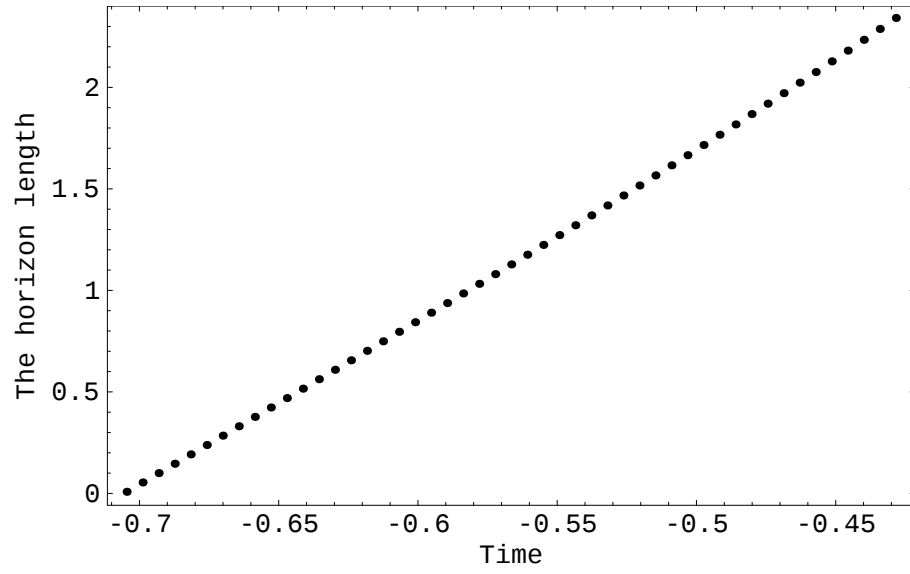


Рис. 11: Размер горизонта для $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$

7 Шоковые волны на AdS_3

Тема гравитационных полей, создаваемых ультрарелятивистскими частицами, привлекает все большее число исследователей из различных областей теоретической физики. Еще в шестидесятых было известно, что эти поля представляют собой плоские волны [26, 27]. Далее, Aichelburg и Sexl [5] рассмотрели частицу с нулевой массой покоя, движущуюся со скоростью света. Ими было получено, что гравитационное поле такой частицы исчезает всюду, кроме плоскости, содержащей частицу и проходящей перпендикулярно ее траектории. На этой плоскости тензор Римана имел дельтаобразную сингулярность, поэтому такую поверхность принято называть шоковой (ударной) волной. Этот результат был получен рассмотрением решения Шварцшильда в системе отсчета, движущейся со скоростью света. Обобщения для метрики Керра и Керра-Ньюмана также имеют место [32, 33, 34, 35]. Отдельный случай частиц в пространствах (анти-)де Ситтера возник при исследовании квантовых гравитационных эффектов в работе Hotta и Tanaka [29], где поля получались при действии преобразований Лоренца на метрику Шварцшильда-де Ситтера (точнее, на линеаризованное по массе возмущение метрики де Ситтера):

$$ds^2 \approx - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{r^2}{a^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1} \left[1 + \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1} \frac{2m}{r}\right] dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (66)$$

Преобразования Лоренца в ультрарелятивистском пределе (см. также [30]) дают как результат решение, отличающееся от пространства де Ситтера только «ударной компонентой» в виде некоторой поверхности. В силу нелинейности Эйнштейновской теории возникает сомнение, что такой линеаризованный подход приводит к правильному результату. Однако, есть вычисления, показывающие, что метрика Шварцшильда-де Ситтера с произвольной массой дает тот же результат [28]. В данном разделе мы получим решение типа шоковой волны в пространстве AdS_3 . Этот вывод не содержится в существующих работах, т.к. в них рассматриваются пространства AdS_n с размерностью выше трех. Однако, существующие выводы неприменимы к AdS_3 по ряду причин, и результаты не совпадают с правильным простым стремлением $n \rightarrow 3$.

7.1 Вывод гравитационного решения

BTZ-метрика для черной дыры с нулевым угловым моментом в полярных координатах (t, r, φ) :

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{a^2} - m\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{a^2} - m\right)} + r^2 d\varphi^2, \quad (67)$$

где размерный параметр $a^2 \equiv -\Lambda^{-1} > 0$ связан с космологической постоянной. Введем гиперболические координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{a^2 + r^2} \sin(t/a), \\ Z_1 &= r \cos \varphi, \\ Z_2 &= r \sin \varphi, \\ Z_4 &= \sqrt{a^2 + r^2} \cos(t/a). \end{aligned} \quad (68)$$

В этих координатах метрика AdS_3 принимает каноническую форму:

$$ds_{AdS}^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 - dZ_4^2 \quad (69)$$

Уравнение связи:

$$-a^2 = -Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 - Z_4^2. \quad (70)$$

Метрика для черной дыры (67) в гиперболических координатах:

$$ds^2 = ds_{AdS}^2 + \frac{m+1}{a^2 B^2} \left[(Z_4 dZ_0 - Z_0 dZ_4)^2 + \right. \\ \left. + (Z_0 dZ_0 - Z_4 dZ_4)^2 \frac{B}{m+1} \left\{ 1 + \frac{1}{B^{-1} - 1} \left(1 - \frac{1}{B - (m+1)} \right) \right\} \right], \quad (71)$$

где введено обозначение

$$B \equiv \frac{Z_0^2 + Z_4^2}{a^2}. \quad (72)$$

Заметим, что при $m = -1$ BTZ-метрика переходит в AdS-метрику. В линейном приближении по $(m+1)$ получаем:

$$ds^2 \simeq ds_{AdS}^2 + \frac{m+1}{a^2 B^2} \left[(Z_4 dZ_0 - Z_0 dZ_4)^2 + \frac{1}{B-1} (Z_0 dZ_0 - Z_4 dZ_4)^2 \right], \quad (73)$$

Преобразование Лоренца в направлении Z_1 :

$$\begin{aligned} Z_0 &\rightarrow \gamma(Z_0 + vZ_1), \\ Z_1 &\rightarrow \gamma(vZ_0 + Z_1), \\ Z_2 &\rightarrow Z_2, \\ Z_4 &\rightarrow Z_4. \end{aligned} \quad (74)$$

Здесь гамма-фактор $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$. Для того, чтобы исключить расходимость и получить осмысленный результат, необходимо попутно изменять массовый параметр $m+1 = p\sqrt{1-v^2}$. В случае пространства анти-де Ситтера с размерностью больше трех это означало бы, что в результате процедуры мы получили бы гравитационное поле безмассовой частицы с импульсом p . Это связано с тем, что для более высоких размерностей рассматривается не предел $m+1 \rightarrow 0$, а $m \rightarrow 0$ [28]. Для перехода к пределу $\gamma \rightarrow \infty$ используем следующее тождество:

$$\lim_{v \rightarrow 1} \gamma f(\gamma^2(Z_0 + vZ_1)^2) = \delta(Z_0 + Z_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2) dx \quad (75)$$

и получаем искомую метрику:

$$ds_{BOOST}^2 = ds_{AdS}^2 + \pi p \left(Z_4 - \sqrt{Z_4^2 - a^2} \right) \delta(Z_0 + Z_1) (dZ_0 + dZ_1)^2, \quad (76)$$

где AdS-метрика была определена в (69). Как нетрудно заметить, решение формирует ударный фронт определяемый условием $Z_0 + Z_1 = 0$, $Z_2^2 - Z_4^2 = -a^2$, то есть уравнением гиперболы. Решение такого вида может быть названным шоковой волной, т.к. содержит сингулярное возмущение вдоль некоторой движущейся поверхности кривой, а вне этой кривой метрика остается невозмущенной. Оказывается полезным упростить эту метрику, переходя к координатам светового конуса $U = Z_0 + Z_1$, $V = Z_0 - Z_1$ и производя следующее кусочно-линейное преобразование:

$$\begin{aligned} U &\rightarrow U, \\ V &\rightarrow V - \left(\frac{\pi p}{2} \right)^2 U \theta(U) + \pi p Z_4 \theta(U), \\ Z_2 &\rightarrow Z_2 \\ Z_4 &\rightarrow Z_4 - \frac{\pi p}{2} U \theta(U). \end{aligned} \quad (77)$$

Преобразованная метрика:

$$\begin{aligned} ds_{BOOST}^2 &\rightarrow -dUdV + dZ_2^2 - dZ_4^2 - \pi p|Z_2|\delta(U)dU^2 = \\ &= ds_{AdS}^2 - \pi p|Z_2|\delta(U)dU^2. \end{aligned} \quad (78)$$

7.2 Светоподобные геодезические

В этом разделе мы найдем геодезические для полученного решения, чтобы понять, как влияет шоковая волна на безмассовые частицы, которые проходят через ее поверхность. Для начала определим функцию $f(Z_2) \equiv -\pi p|Z_2|$, после чего метрический тензор для (78) примет следующую форму:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(Z_2)\delta(U) & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (79)$$

Отличные от нуля компоненты связности:

$$\begin{aligned} \Gamma_{UU}^V &= -f(Z_2)\dot{\delta}(U) \\ \Gamma_{Z_2U}^V &= \Gamma_{UZ_2}^V = -f'(Z_2)\delta(U) \\ \Gamma_{UU}^{Z_2} &= -f'(Z_2)\delta(U)/2 \end{aligned} \quad (80)$$

где точка означает дифференцирование по U , а штрих - по аргументу функции $f(\cdot)$. Уравнения для геодезических:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2U}{d\tau^2} &= 0 \\ \frac{d^2V}{d\tau^2} &= \frac{dU}{d\tau} (f(Z_2)\frac{dU}{d\tau}\dot{\delta}(U) + 2\delta(U)\frac{dZ_2}{d\tau}f'(Z_2)) \\ \frac{d^2Z_2}{d\tau^2} &= \frac{1}{2}\delta(U) \left(\frac{dU}{d\tau} \right)^2 f'(Z_2) \\ \frac{d^2Z_4}{d\tau^2} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (81)$$

Очевидно, что решение вне ударной поверхности ($U \neq 0$) линейно по параметру τ . Таким образом, мы можем выбрать калибровку $\tau = U$. В этой параметризации перепишем систему (81) в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{V} &= (f(Z_2)\delta(U))' + \delta(U)\dot{Z}_2f'(Z_2) \\ \ddot{Z}_2 &= \frac{1}{2}f'(Z_2)\delta(U) \\ \dot{Z}_4 &= const \end{aligned} \right. \quad (82)$$

Определим начальные условия

$$\begin{aligned} V(-1) &= V_0, & \dot{V}(-1) &= \dot{V}_0, \\ Z_2(-1) &= Z_{20}, & \dot{Z}_2(-1) &= \dot{Z}_{20}, \\ Z_4(-1) &= Z_{40}, & \dot{Z}_4(-1) &= \dot{Z}_{40}, \end{aligned} \quad (83)$$

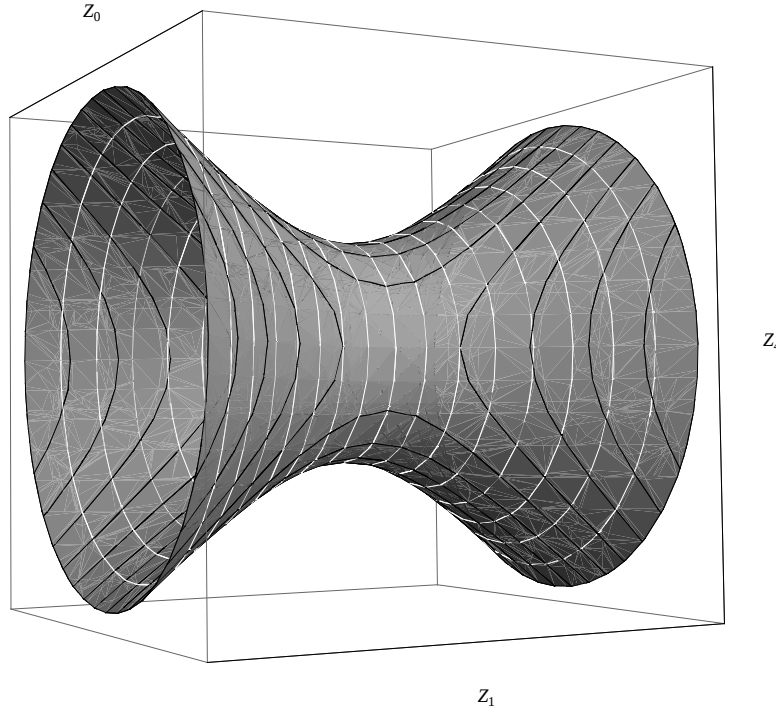


Рис. 12: Пространство анти-де Ситтера, представленное трехмерным гиперboloидом, вложенным в 4-мерное пространство Минковского с двумя времениподобными направлениями Z_0 и Z_4 . Направление Z_2 для наглядности не указано.

Константы из начального условия связаны следующими отношениями:

$$\begin{aligned} -2\dot{V}_0 + \dot{Z}_{20}^2 - \dot{Z}_{40}^2 &= 0 \\ 2V_0 + Z_{20}^2 - Z_{40}^2 &= -a^2 \\ \dot{V}_0 - V_0 + 2\dot{Z}_{20}Z_{20} - 2\dot{Z}_{40}Z_{40} &= 0 \end{aligned} \quad (84)$$

Первое является нормировочным условием для случая светоподобной геодезической. Второе и третье возникают из уравнения связи (70) и его производной.

Решение для (81) с начальными условиями (83):

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \dot{V}_0(1 + U) + f(Z_{20} + \dot{Z}_{20})\theta(U) + f'(Z_{20} + \dot{Z}_{20}) \left(\dot{Z}_{20} + \frac{f'(Z_{20} + \dot{Z}_{20})}{4} \right) U\theta(U) \\ Z_2 &= Z_{20} + \dot{Z}_{20}(1 + U) + \frac{f'(Z_{20} + \dot{Z}_{20})}{2} U\theta(U) \end{aligned} \quad (85)$$

В частности, если пробная безмассовая частица движется навстречу ударной волне и отстоит от оси Z_1 на прицельный параметр b , то решению можно придать более прозрачную форму:

$$\begin{aligned} Z_2 &= b + f'(b)U\theta(U)/2 \\ V &= (f'(b))^2 U\theta(U)/4 + f(b)\theta(U) \end{aligned} \quad (86)$$

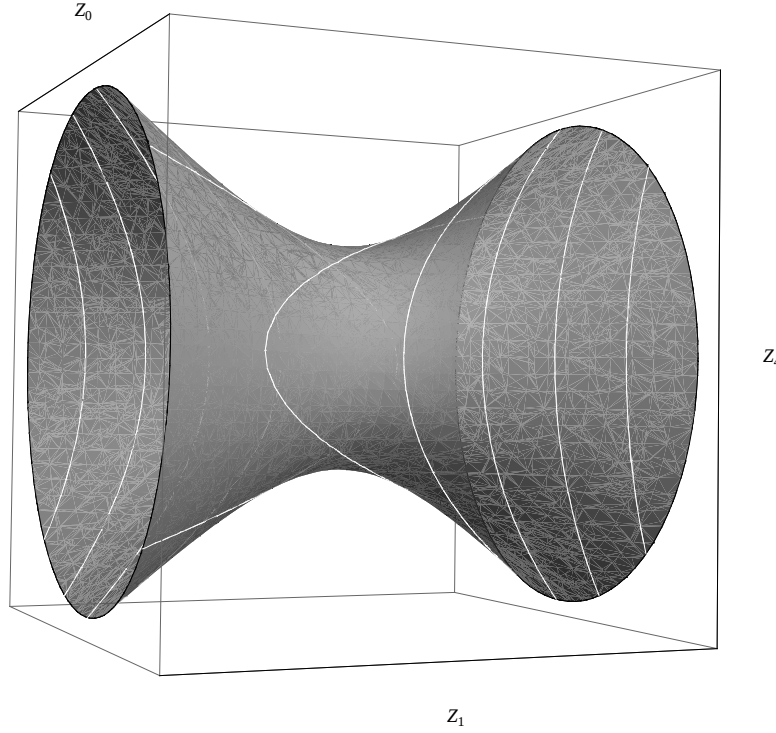


Рис. 13: Пространство анти-де Ситтера и семейство кривых $U = \text{const}$ на нем. В тексте рассматривается фронт волны $U = 0$.

Отсюда можно заметить, что физический смысл функции $f(Z_2)$ на языке геометрической оптики - это “фазовый сдвиг”, который приобретают частицы, проходящие через ударный фронт с прицельным параметром Z_2 , причем смещение координат описывается следующим соотношением:

$$\Delta Z_0 = \Delta Z_1 = \frac{\Delta V}{2} = \frac{f(b)}{2} \quad (87)$$

Из (86) видно, что шоковая волна преломляет траектории частиц подобно тонкой собирающей линзе с фокальным расстоянием

$$F = -\frac{2b}{f'(b)} = \frac{2b}{\pi p} \quad (88)$$

Подобная зависимость фокуса от параметра b - это специфика выбранного количества измерений в нашей задаче. Действительно, рассмотрим метрику (79) в случае $D + 1$ измерений, положив $f = f(Z_2, Z_3, \dots, Z_D)$. Единственной не исчезающей компонентой тензора Риччи будет:

$$R_{UU} = -\frac{1}{2}\Delta_{(D-2)}f(Z_2, Z_3, \dots, Z_D)\delta(U). \quad (89)$$

При подстановке этого значения в уравнения Эйнштейна с точечным источником получим, что функция $f(\cdot)$ должна быть функцией Грина $(D - 2)$ -мерного оператора Лапласа. И если в нашем случае $f(Z_2) \sim |Z_2|$, то добавлением еще одного измерения получим $f(Z_2, Z_3) \sim (Z_2^2 + Z_3^2)$. В последнем случае фокусное расстояние перестает зависеть от

прицельного параметра - шоковая волна действует на пучок падающих на нее частиц как собирающая линза, свойства которой определяются только энергией точечного источника, ее порождающего [31].

Окончательно решение для геодезических выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
V(U) &= V_0 + \dot{V}_0(1+U) - \pi p |Z_{20} + \dot{Z}_{20}| \theta(U) - \\
&\quad - \pi p \cdot \text{sgn}(Z_{20} + \dot{Z}_{20}) \left(\dot{Z}_{20} - \frac{\pi p}{4} \cdot \text{sgn}(Z_{20} + \dot{Z}_{20}) \right) U \theta(U) \\
Z_2(U) &= Z_{20} + \dot{Z}_{20}(1+U) - \frac{\pi p}{2} \cdot \text{sgn}(Z_{20} + \dot{Z}_{20}) U \theta(U)
\end{aligned} \tag{90}$$

плюс связь (84).

8 Заключение

В данной работе исследованы процессы лобового столкновения частиц на AdS_3 , приводящие к появлению черной дыры. К результатам работы следует отнести обобщение алгоритма, предложенного в [23] на случай произвольного числа частиц и получения на его основе пороговых энергий образования черной дыры и характеристик горизонта. В качестве гипотезы предлагается соотношение (60) для случая $\mathcal{N} > 40$ частиц с различной энергией, налетающих с произвольного направления. Примечательно, что черные дыры не образуются при энергиях ниже планковского масштаба. Кроме того, получено решение типа шоковой волны для AdS_3 и геодезические для него. Решение сходно со случаями более высокой размерности и также, с некоторыми оговорками, обладает свойством фокусировки светоподобных геодезических.

9 Благодарности

Автор благодарит д.ф.-м.н проф. И.Я.Арефьеву за предложенную идею работы, а также к.ф.-м.н. доц. А.Н.Соболевского за обсуждение и замечания по работе. Работа поддержана грантом фонда «Династия». Результаты работы были доложены на научной конференции «Ломоносов-2009» в МГУ, на семинаре отдела теоретической физики ускорительного центра DESY в Гамбурге (Deutsches Elektronen-Synchrotron), на семинаре отдела теоретической физики Математического Института РАН им. Стеклова, а также на спецсеминаре кафедры квантовой статистики и теории поля Физического Факультета МГУ.

Список литературы

- [1] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli: The black hole in three dimensional space, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849.
- [2] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli: Geometry of the 2+1 black hole, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 1506.
- [3] D. Birmingham, I. Sachs, and S. Sen: Entropy Of Three-Dimensional Black Holes In String Theory, *Phys. Lett.* **B424** (1998) 275-280, [hep-th/9801019](#).

- [4] S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft: Three dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space, *Ann. Phys.* **152** (1984) 220
- [5] P. C. Aichelburg and R. U. Sexl, On the gravitational field of a massless particle, *Gen. Rel. Grav.* **2**, (1971) 303.
- [6] S. Deser, R. Jackiw: Three dimensional Cosmological gravity: dynamics of constant curvature, *Ann. Phys.* **153** (1984) 407
- [7] J. Maldacena, The large N limit of superconformal field theories and supergravity, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231-252, [hep-th/9711200](#).
- [8] S. S. Gubser, S. S. Pufu and A. Yarom, Off-center collisions in AdS with applications to multiplicity estimates in heavy-ion collisions, [hep-th/0902.4062](#).
- [9] G. 't Hooft, Graviton dominance in ultra-high scattering, *Phys. Lett. B* **198** (1987) 61; *Nucl. Phys. B* **304** (1988) 867.
- [10] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano, Superstring Collisions At Planckian Energies *Phys. Lett. B* **197** (1987) 81; *Int. J. Mod. Phys. A* **3** (1988) 1615; *Phys. Lett.* **216** (1989) 41; *Nucl. Phys. B* **347** (1990) 550; *Phys. Lett. B* **289** (1992) 87; *Nucl. Phys. B* **403** (1993) 707.
- [11] H. Verlinde and E. Verlinde, Scattering at Planckian Energies, *Nucl. Phys. B* **371** (1992) 246 [hep-th/9110017](#).
- [12] M. Fabbrichesi, R. Pettorino, G. Veneziano and G. A. Vilkovisky, Planckian energy scattering and surface terms in the gravitational action *Nucl. Phys. B* **419** (1994) 147.
- [13] I. Ya. Aref'eva, K. Viswanathan and I. Volovich, Planckian-energy scattering, colliding plane gravitational waves and black hole creation, *Nucl. Phys. B* **452** (1995) 346, [Erratum-ibid. **462**, 613 (1996)], [hep-th/9412157](#) I. Ya. Arefeva, K. S. Viswanathan and I. V. Volovich, On black hole creation in Planckian energy scattering, *Int. J. Mod. Phys. D* **5**, 707 (1996), [hep-th/9512170](#)
- [14] I. Ya. Aref'eva, High Energy Scattering in the Brane-World and Black Hole Production, *Part.Nucl.* **31** (2000) 169, [hep-th/9711200](#)
- [15] G.F. Giudice, R. Rattazzi and J.D. Wells, Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders, *Nucl. Phys. B* **544** (1999) 3, [hep-ph/9811291](#). G.F. Giudice, R. Rattazzi and J.D. Wells, Transplanckian Collisions at the LHC and Beyond, *Nucl.Phys. B* **630** (2002) 293, [hep-ph/0112161](#).
- [16] T. Banks and W. Fischler, A Model for High Energy Scattering in Quantum Gravity, [hep-th/9906038](#).
- [17] S. Dimopoulos and G. Landsberg, Black Holes at the LHC, *Phys.Rev.Lett.* **87** (2001) 161602, [hep-ph/0106295](#).
- [18] S.B. Giddings and S. Thomas, High Energy Colliders as Black Hole Factories: The End of Short Distance Physics, *Phys.Rev.* **D65** (2002) 056010, [hep-ph/0106219](#).
- [19] D.M. Eardley and S.B. Giddings, Classical Black Hole Production in High-Energy Collisions, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 044011, [gr-qc/0201034](#).

- [20] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter, *Phys.Lett.* **B429** (1998) 263, [hep-ph/9803315](#); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV, *Phys.Lett.* **B436** (1998) 257, [hep-ph/9804398](#).
- [21] L. Randall and R. Sundrum, A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370, [hep-ph/9905221](#).
- [22] Huitzu Tu, Microscopic Black Hole Production in TeV-Scale Gravity, *Surveys High Energ.Phys.* **17** (2002) 149-163, [hep-ph/0205024](#).
- [23] H.-J. Matschull, Black hole creation in $2 + 1$ dimensions, *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) 1069.
- [24] G. 't Hooft, Quantization of point particles in $(2+1)$ -dimensional gravity, *Class. Quantum Grav.* **13** (1996) 1023.
- [25] H.-J. Matschull and M. Welling, Quantum mechanics of a point particle in $2+1$ dimensional gravity, *Class. Quantum Grav.* **15** (1998) 2981.
- [26] A. Peres, Null Electromagnetic Fields in General Relativity Theory, *Phys. Rev.* **118** (1960) 1105.
- [27] W. B. Bonnor, The gravitational field of light, *Comm. Math. Phys.* **13** (1969) 163.
- [28] G. Esposito, R. Pettorino, P. Scudellaro, On boosted space-times with cosmological constant and their ultrarelativistic limit, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4** (2007) 361-372, [gr-qc/0606126](#)
- [29] M. Hotta and M. Tanaka, Shock-wave geometry with non-vanishing cosmological constant, *Class. Quantum Grav.* **10** (1993) 307.
- [30] J. Podolský and J. B. Griffiths, Impulsive gravitational waves generated by null particles in de Sitter and anti-de Sitter backgrounds, *Phys. Rev.* **D 56** (1997) 4756.
- [31] V. Ferrari, P. Pendenza and G. Veneziano, Beam-Like Gravitational Waves and Their Geodesics, *Gen. Rel. Grav.* **20**, (1988) 1185.
- [32] V. Ferrari and P. Pendenza, Boosting the Kerr metric, *Gen. Rel. Grav.* **22** (1990) 1105.
- [33] H. Balasin and H. Nachbagauer, The ultrarelativistic Kerr geometry and its energy-momentum tensor, *Class. Quantum Grav.* **12** (1995) 707.
- [34] H. Balasin and H. Nachbagauer, Boosting the Kerr geometry in an arbitrary direction, *Class. Quantum Grav.* **13** (1996) 731.
- [35] C. O. Loustó and N. Sánchez, The ultrarelativistic limit of the boosted Kerr-Newman geometry and the scattering of spin- $\frac{1}{2}$ particles, *Nucl. Phys. B* **383** (1992) 377.